A.R.I. - Sezione di Parma

Corso di preparazione esame patente radioamatore 2020

Matematica per OM

Carlo Vignali, I4VIL

PROPORZIONI NUMERICHE

Quattro numeri ordinati formano una proporzione quando il quoziente del 1° per il secondo è uguale al quoziente del 3° per il 4°.

Esempio: $4 : 5 = 16 : 20$

Infatti:

$$\frac{4}{5} = 0.8 \qquad \frac{16}{20} = 0.8$$

Inoltre:
il primo ed il quarto numero si chiamano *estremi* , il secondo ed il terzo si chiamano *medi* e si verifica che
il prodotto dei *medi* è uguale al prodotto degli *estremi:*

$$5 \cdot 16 = 4 \cdot 20$$

Se i *medi* sono uguali, il numero che forma i *medi* si dice *medio proporzionale* tra gli *estremi*.
Esempio:

$$4 : 10 = 10 : 25$$

PROPORZIONI NUMERICHE - 2

Se in una proporzione uno dei quattro numeri è sconosciuto, si può facilmente calcolare con la “Regola del tre”:

Se il numero sconosciuto è un *estremo*, si moltiplicano tra loro i due *medi* e si divide per l’*estremo* conosciuto

Se il numero sconosciuto è un *medio*, si moltiplicano tra loro gli *estremi* e si divide per il *medio* conosciuto

Se il numero sconosciuto è il *medio proporzionale*, si moltiplicano tra loro i due *medi* e si estrae la radice quadrata.

Esempi:

$$x : 12 = 8 : 3 \qquad x = \frac{12 \cdot 8}{3} = 32$$

$$3 : 8 = x : 10 \qquad x = \frac{3 \cdot 10}{8} = 3.75$$

Esempi:

$10 : x = x : 40 \qquad x^2 = 400 \qquad x = \sqrt{400} \qquad x = \pm 20$

$x : 10 = 40 : x \qquad 400 = x^2 \qquad x = \sqrt{400} \qquad x = \pm 20$

La radice quadrata ha sempre due soluzioni, che sono reali se il radicando è positivo o immaginarie se il radicando è negativo.

Esempio:

Una tensione continua di 12 V fa circolare una corrente I = 150 mA in una resistenza.
Quale tensione occorrerebbe applicare per far scorrere una corrente di 500 mA?

$$12 \; : \; 150 \; = \; x \; : \; 500$$

ATTENZIONE ! → tensione, corrente, tensione, corrente

$$12 \cdot 500 = x \cdot 150$$

$$x = \frac{12 \cdot 500}{150} = 40 \text{ V}$$

MEDIA ARITMETICA

Media aritmetica di due o più numeri è il numero che si ottiene sommando tutti i numeri dati e dividendo questa somma per il numero dei termini.
Utile per diminuire l' "errore di misura".

Esempio: date due misure: $x_1 = 30.6$ e $x_2 = 30.0$, la media diviene:

$$\bar{x} = 30.30 \pm 0.4$$

Aumentando il numero delle misure…..

Siano: $x_1 = 30.6$, $x_2 = 30.0$, $x_3 = 30.4$, $x_4 = 30.3$, $x_5 = 30.4$
Si ottiene:

$$\bar{x} = 30.34 \pm 0.2$$

MEDIA GEOMETRICA

Media geometrica di due numeri è il numero che risulta essere medio proporzionale tra essi, ovvero la radice quadrata del loro prodotto.

Esempio: siano dati due numeri: 8 e 32. Qual è la loro media geometrica?

$$8 : x = x : 32$$

$$x^2 = 8 \cdot 32 = 256$$

$$x = \sqrt{256} = 16$$

Nelle proporzioni, il prodotto dei *termini medi* è uguale al prodotto dei *termini estremi.*

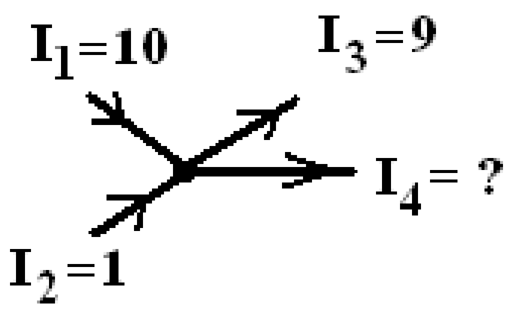
Esempio: con una linea $\lambda/4$ si vuole trasformare l'impedenza da 100 Ω a 50 Ω . Quale deve essere l'impedenza caratteristica Zo della linea ?

$$Zo = \sqrt{100 \cdot 50} = 70.7 \ \Omega$$

UGUAGLIANZE

Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri uno stesso numero, l'uguaglianza rimane .

Esempio: 1° Principio di Kirchoff .   In un nodo elettrico la somma delle corrente entranti è uguale, in ogni istante, alla somma delle correnti uscenti.



$$10 + 1 = 9 + I_4$$

$$10 + 1 - 9 = 9 + I_4 - 9$$

$$2 = I_4$$

Stesso risultato si ottiene spostando un numero oltre l'uguale, ma cambiando segno

$$10 + 1 = 9 + I_4$$

$$10 + 1 - 9 = + I_4$$

$$2 = I_4$$

UGUAGLIANZE

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (diverso da zero) l'uguaglianza rimane.

$$6\,x = 30 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{6}\,x}{\cancel{6}} = \frac{30}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

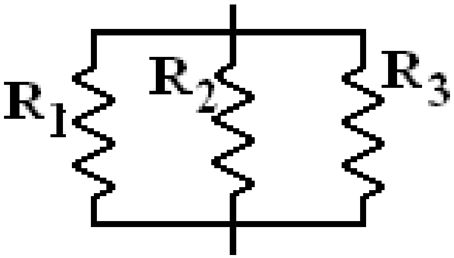
$$I = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad R\,I = \frac{V\,\cancel{R}}{\cancel{R}} \quad \Rightarrow \quad V = R\,I$$

UGUAGLIANZE

Se si invertono entrambi i membri, l'uguaglianza rimane

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5}$$

Esempio: più resistenze in parallelo.



$R_1 = 10$

$R_2 = 5$

$R_3 = 2$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1+2+5}{10}$$

m.c.m.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{8}{10} \qquad \frac{R_{eq}}{1} = \frac{10}{8} \qquad R_{eq} = 1.25$$

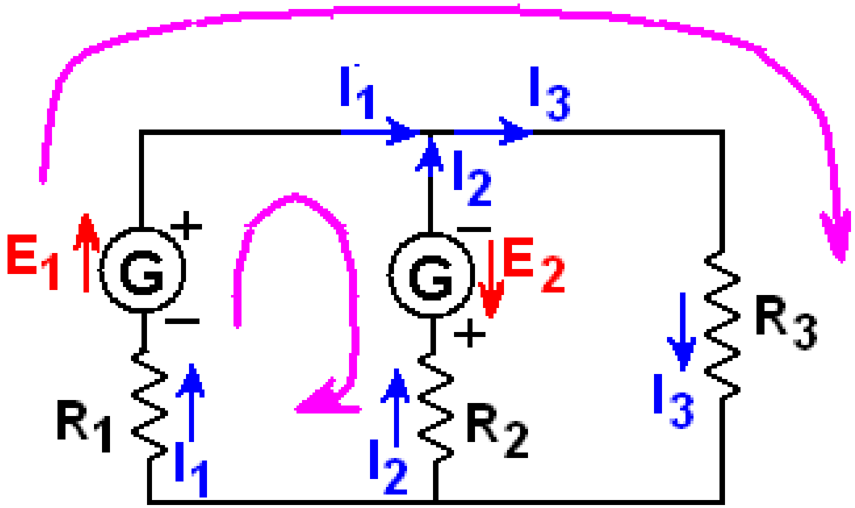
II° PRINCIPIO DI KIRCHOFF

Il II° principio di Kirchoff si riferisce alle maglie e compendia in una sola equazione la somma delle relazioni che si ottengono scrivendo la legga di Ohm per i lati consecutivi che formano una maglia qualunque.
In una rete comunque complessa, la somma delle f.e.m. che si incontrano percorrendo una maglia chiusa qualunque è uguale alla somma algebrica delle cadute ohmiche di tensione relative ai lati consecutivi della stessa maglia.

$$\sum E = \sum R \cdot I$$

Si devono considerare positive le f.e.m. dirette nel verso di percorrenza della maglia e negative quelle dirette in verso opposto..
Le cadute di tensione R I degli stessi lati consecutivi della maglia considerata, sono considerate positive quelle relative ai lati che sono percorsi da corrente diretta nello stesso verso di percorrenza e negative se dirette in verso opposto.

II° PRINCIPIO DI KIRCHOFF



$E_1 = 10\ V$
$E_2 = 5\ V$

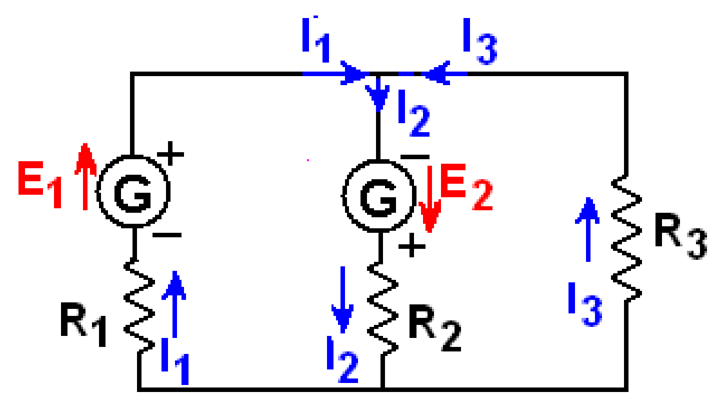
$R_1 = 200\ \Omega$
$R_2 = 50\ \Omega$
$R_3 = 100\ \Omega$

Si suppongano, inoltre, i versi delle correnti. Se il calcolo porterà a risultato negativo, il verso vero della corrente è quello opposto.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 + E_2 = R_1\, I_1 - R_2\, I_2 \\ E_1 = R_3\, I_3 + R_1\, I_1 \end{cases}$$

3 equazioni in 3 incognite

risultato: ➔
$$I_1 = 0.057\ A$$
$$I_2 = -0.0714\ A$$
$$I_3 = -0.0143\ A$$



Le correnti I_2 e I_3 hanno verso opposto

NOTAZIONE ESPONENZIALE

Le potenze ci consentono di scrivere numeri molto grandi o molto piccoli in maniera più semplice attraverso la **notazione esponenziale** ($h \cdot 10^n$) dove h è un numero ed n è l'ordine di grandezza.

Es: 35 000 000 000 (trentacinque miliardi) diviene: $35\ 10^9$ o, anche, $3.5\ 10^{10}$.

Es: 0,000 000 000 230 (duecento trenta milionesimi di milionesimo) diviene: $230\ 10^{-12}$ o, anche, $0.23\ 10^{-9}$ o, anche, $2.3\ 10^{-10}$.

L'esponente del 10 , se positivo, indica quanti zeri dobbiamo aggiungere dopo il numero .
Se negativo, indica il numero di cifre decimali.

....		
1 000 000 000 000	=	10^{12}
....		
1 000 000 000	=	10^{9}
....		
1 000 000	=	10^{6}
100 000	=	10^{5}
10 000	=	10^{4}
1 000	=	10^{3}
100	=	10^{2}
10	=	10^{1}
1	=	10^{0}
0.1	=	10^{-1}
0.01	=	10^{-2}
0.001	=	10^{-3}
0.0001	=	10^{-4}
0.00001	=	10^{-5}
0.000001	=	10^{-6}
....		
0.000000001	=	10^{-9}
....		

n .

NOTAZIONE ESPONENZIALE

La notazione esponenziale può essere vista come un prodotto tra il numero *h* ed 10^n. In un prodotto, si può moltiplicare e dividere per uno stesso numero (diverso da zero); per questo possiamo avere diverse presentazioni: $3\ 10^9$, $0.3\ 10^{10}$, $30\ 10^8$, ecc…

Con una ***calcolatrice scientifica*** battere:

h EXP *n*

NOTAZIONE ESPONENZIALE

In un prodotto di numeri che usano la notazione esponenziale, i termini *h* si moltiplicano normalmente, mentre gli esponenti *n* si sommano (con segno).

Es.: $3.5\ 10^{4} \cdot 2.3\ 10^{7} = 8.05\ 10^{11}$.

Es.: $3.5\ 10^{3} \cdot 2.3\ 10^{-5} = 8.05\ 10^{-2}$.

Nelle divisioni, i termini *h* si dividono normalmente, mentre gli esponenti *n* si sottraggono (con segno).

Es.: $8\ 10^{9} / 4\ 10^{3} = 2\ 10^{6}$.

Es.: $6\ 10^{-3} / 2\ 10^{-6} = 3\ 10^{3}$.

NOTAZIONE ESPONENZIALE

Esempi:

Il rapporto tra la attrazione gravitazionale e la attrazione coulombiana (elettrica) tra il protone e l'elettrone di un atomo di idrogeno è dell'ordine di 10^{-40} .

Che tensione si manifesta su una resistenza R= 2.2 MΩ quando è percorsa da una corrente continua di 8 μA ?

$R = 2.2\ M\Omega = 2.2\ 10^{6}\ \Omega$

$I = 8\ \mu A = 8\ 10^{-6}\ A$

$$V = R \cdot I = 2.2\ 10^{6} \cdot 8\ 10^{-6} = 17.6\ 10^{0} = 17.6\ V$$

Che tensione si manifesta su una resistenza R= 18 kΩ quando è percorsa da una corrente continua di 4 μA ?

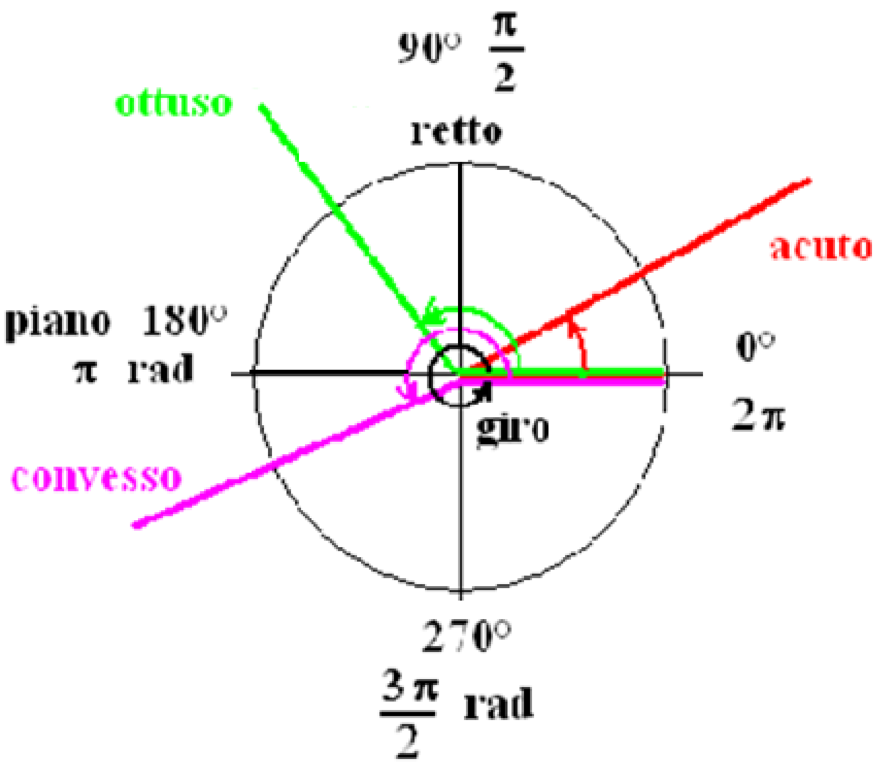
$R = 18\ k\Omega = 18\ 10^{3}\ \Omega$

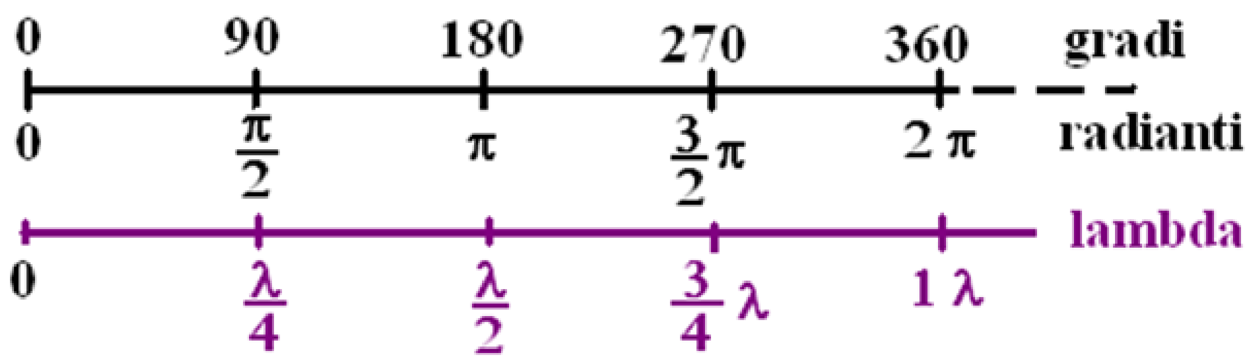
$I = 4\ \mu A = 4\ 10^{-6}\ A$

$$V = R \cdot I = 18\ 10^{3} \cdot 4\ 10^{-6} = 72\ 10^{3-6} = 72\ 10^{-3}\ V$$

$$= 0.072\ V$$

ANGOLI


90° $\frac{\pi}{2}$
retto
ottuso
acuto
piano 180°
π rad
0°
2π
giro
convesso
270°
$\frac{3\pi}{2}$ rad


0 90 180 270 360 gradi
0 $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3}{2}\pi$ 2π radianti
lambda
0 $\frac{\lambda}{4}$ $\frac{\lambda}{2}$ $\frac{3}{4}\lambda$ 1λ

ALFABETO GRECO

Letter		Sound	Name	Letter		Sound	Name
Cap.	small			Cap.	small		
Α	α	a	alpha	Ν	ν	n	nu
Β	β	b	beta	Ξ	ξ	x	xi
Γ	γ	g	gamma	Ο	ο	o	omikron
Δ	δ	d	delta	Π	π	p	pi
Ε	ε	e	epsilon	Ρ	ρ	rh	rho
Ζ	ζ	z	zeta	Σ	σ	s	sigma
Η	η	e	eta	Τ	τ	t	tau
Θ	ϑ	th	theta	Υ	υ	y	ypsilon
Ι	ι	i	jota	Φ	φ	ph	phi
Κ	κ	k	kappa	Χ	χ	ch	chi
Λ	λ	l	lambda	Ψ	ψ	ps	psi
Μ	μ	m	mu	Ω	ω	o	omega

PRINCIPALI GRANDEZZE ELETTRICHE

$I = \frac{V}{R}$	corrente	ampere	A	
$V = R\,I$	tensione, f.e.m., d.d.p.	volt	V	
$R = \frac{V}{I}$	resistenza	ohm	Ω	
$P = V\,I = \frac{V^2}{R} = R\,I^2$	potenza	watt	W	
$E = P\,t$	energia	joule	J	(W·s)
$Q = I\,t$	quantità di carica	coulomb	C	
$C = \frac{Q}{V}$	capacità	farad	F	
$L = \frac{\varnothing}{I}$	induttanza	henry	H	
$B = \mu\,H = \frac{\varnothing}{S}$	induzione magnetica	tesla	T	(Wb/m^2)
$\varnothing = B\,S$	flusso magnetico	weber	Wb	
$E = \frac{V}{m}$	campo elettrico	volt/m	V/m	
$H = \frac{N\,I}{l}$	campo magnetico	ampere/m	A/m	

Grandezze scalari e vettoriali

Le grandezze fisiche possono essere suddivise in due categorie:

- Grandezze scalari
- Grandezze vettoriali

Grandezze scalari

Sono le grandezze fisiche che si esprimono tramite un solo numero (preceduto da un segno) seguito da un'unità di misura

Esempi di grandezze scalari:

Intervallo di tempo , t [s]

Massa , m [g]

Volume, V [m^3]

Resistenza elettrica , R [Ω]

Temperatura, T [K]

Grandezze vettoriali

Sono le grandezze fisiche che si esprimono con un vettore (segmento orientato), ovvero con un numero (seguito dall'opportuna unità di misura), una direzione e un verso.

$\vec{A}$

Esempi di grandezze vettoriali :

Velocità. **v** [m/s]
Accelerazione **, a** [m/s^2]
Campo elettrico , **E** [V/m]
Forza, **F** [N]
Campo magnetico, **B** [T]

- Un vettore viene indicato, secondo la notazione vettoriale, con una lettera sormontata da una freccia o con una lettera in **neretto , A**

Esempio grandezza vettoriale: velocità

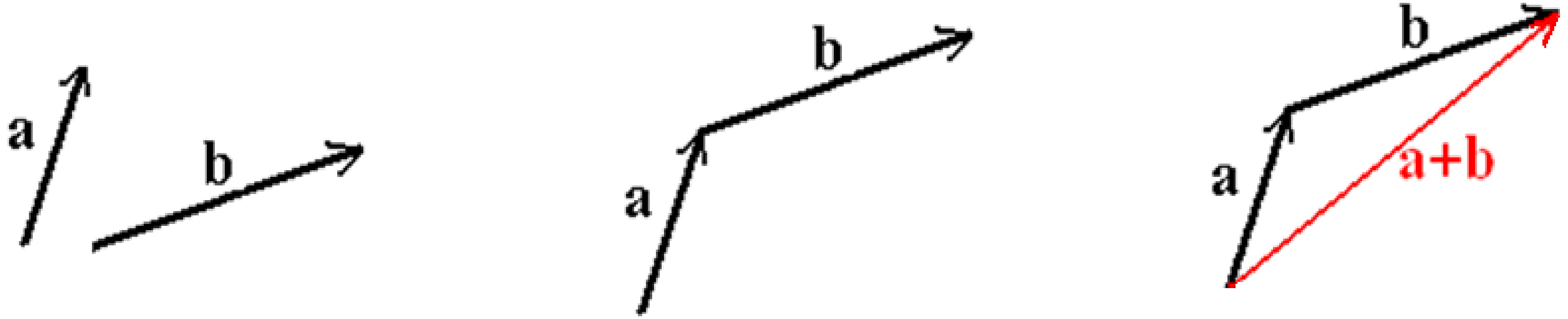
- Per avere un'informazione completa sulla velocità di un'automobile , non è sufficiente dire che viaggia a 100 km/h (**modulo** della velocità), ma occorre precisare che sta percorrendo la tangenziale ovest di Milano (**direzione** nord-sud, quindi), verso Lodi (il **verso**).

Somma di vettori: metodo testa-coda

Siano dati due vettori **a** e **b** :

Traslare uno dei due vettori in modo tale che la testa del primo vettore coincida con la coda del secondo

Costruire il vettore che unisce la coda del primo vettore con la testa del secondo. Questo è proprio il vettore somma di **a** e **b**.

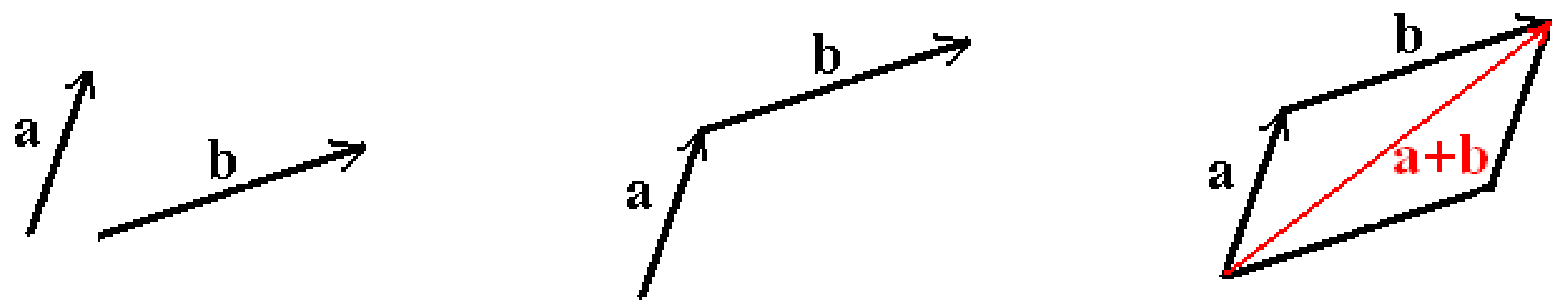


Somma di vettori: metodo del parallelogramma

Siano dati due vettori **a** e **b** :

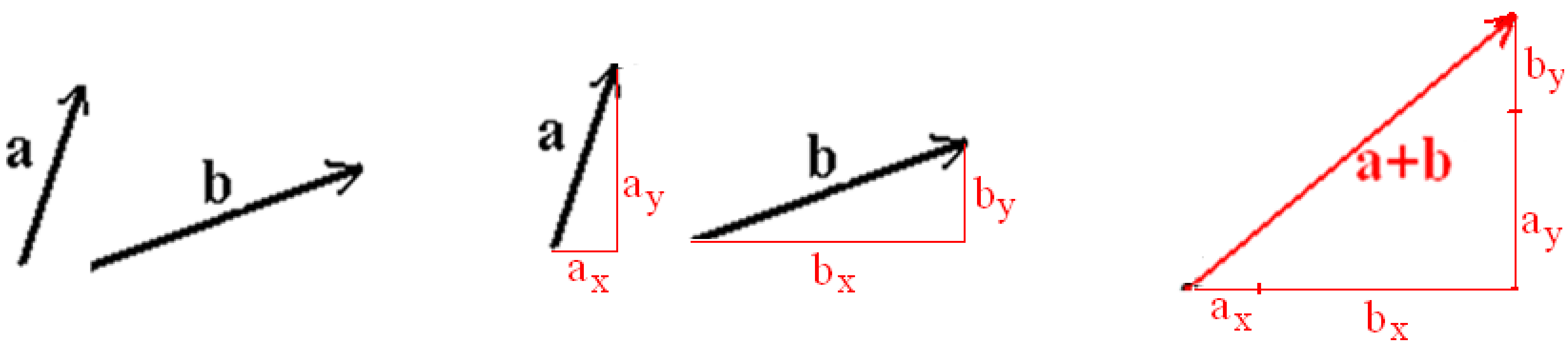
Traslare uno dei due vettori in modo tale che la testa del primo vettore coincida con la coda del secondo

Costruire il parallelogramma che ha per lati i due vettori e tracciare la diagonale che ha per estremo la testa del secondo. Il vettore somma è proprio la diagonale.



Somma di vettori: metodo analitico

Un vettore **a** può sempre essere scomposto in due componenti ortogonali (a_x e a_y , per esempio).
La somma di due vettori può essere effettuata semplicemente sommando le componenti omonime.



Si può usare il teorema di Pitagora:

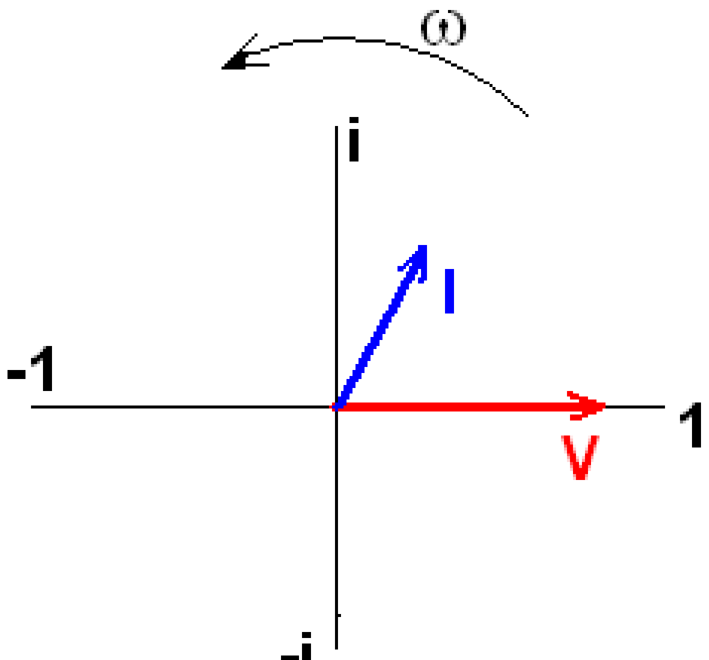
$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \sqrt{(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2}$$

FASORI

Il fasore è un vettore che ruota con velocità angolare ben definita in senso antiorario nel piano complesso e che rappresenta una funzione sinusoidale ω.

I fasori sono utilizzati quale utile rappresentazione in campo complesso di grandezze fisiche (reali) sinusoidali come, in particolare, le grandezze elettriche (tensione, corrente, ecc…).

FASORE - VETTORE ROTANTE



Rappresentazione di tensione e frequenza per mezzo di vettori ruotanti a frequenza angolare ω.

L'idea di rappresentare grandezze alternate sunusoidali con numeri complessi deriva dalla Formula di Eulero.   In pratica:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$$

Una grandezza alternata del tipo:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

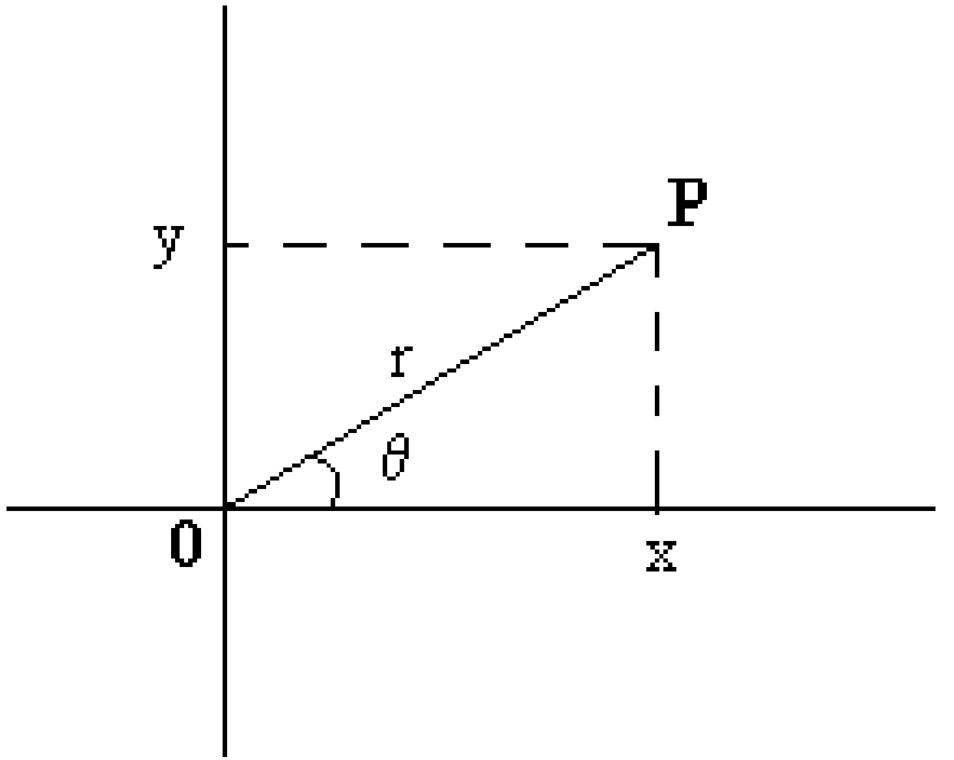
può essere rappresentata come la parte reale di una grandezza complessa del tipo :

$$v(t) = \mathbb{R}\mathrm{e}\left[V_0 \, e^{i\omega t + \phi} \right]$$

Un ‘impedenza complessa può essere indicata come:
Z = R + j X , ovvero con un numero che ha una parte reale ed una parte immaginaria introdotta dall’unità immaginaria j (oppure i) . Il coefficiente dell’unità immaginaria è la reattanza (positiva se induttiva e negativa se capacitiva),
oppure come:

$$\rho = |\rho| \angle \theta$$

ovvero con un modulo ed una fase



Il punto generico P di un piano può essere indicato con due coordinate:

-) x e y   (equivalenti a parte reale e immaginaria)

-) r e q   (modulo e fase)

Ovviamente i due modi sono equivalenti:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta$$

Se lo strumento che hai ha disposizione ti dà sia la parte reale e immaginaria oppure il modulo e la fase del coefficiente di riflessione, è possibile calcolare la ZL incognita.

L'impedenza Z e tante altre grandezze "elettriche" sono espresse da numeri complessi: in pratica occorre conoscere **due** numeri reali, magari ottenuti con due misure differenti.

Se abbiamo uno strumento a disposizione che fornisce un solo numero reale (il ROS, per esempio), non saremo mai in grado di calcolare l'impedenza del carico incognita, ma solo il suo modulo.

Se lo strumento a disposizione fornisce sia la parte reale sia la parte immaginaria (di un'impedenza, per esempio) oppure il modulo e la fase, è possibile calcolare la ZL incognita.

Esempio: coefficiente di riflessione

$$\rho = \frac{V_r}{V_d} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

Sono tutte grandezze complesse

Se disponiamo solo di un numero reale, come il VSWR, per esempio, possiamo solo scrivere:

$$\text{VSWR} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = \frac{|ZL+Zo|+|ZL-Zo|}{|ZL+Zo|-|ZL-Zo|} = \frac{1+\sqrt{\frac{Pr}{Pd}}}{1-\sqrt{\frac{Pr}{Pd}}} =$$

$$= \frac{VMax}{Vmin} = \frac{|Vd|+|Vr|}{|Vd|-|Vr|}$$

Sono tutte grandezze reali

Stessa cosa se conosciamo la potenza diretta e riflessa oppure il Return Loss .   Sono grandezze reali espresse da un solo numero.

Differente è il caso se conosciamo il coefficiente di riflessione ρ , che, nella sua forma completa , è un numero complesso:

$$\rho = \frac{ZL - Zo}{ZL + Zo} = \frac{Vr}{Vd}$$

Sono, infatti, grandezze complesse, esprimibili con parte reale e immaginaria oppure con modulo e fase

Esempio:

Sia:

$$\rho = 0.707 \angle 40$$ (letteratura USA)

In Italia è più usato: $\rho := |\rho| \cdot (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta))$

dove $|\rho|$ è il modulo e θ la fase.

che, nell'esempio, diviene:

$$\rho := 0.707 \cdot (\cos(40) + j \cdot \sin(40))$$

allora:

$$\rho := 0.707 \cdot (0.766 + j \cdot 0.643)$$

$$\rho := 0.542 + j \cdot 0.455$$

Conoscendo il coefficiente di riflessione, si può trovare l'impedenza del carico:

$$ZL := Zo \cdot \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$ con: $Zo := 50 \quad \Omega$

otteniamo:

$ZL = 59.98 + j \; 109.06$ che è il valore cercato

SISTEMA INTERNAZIONALE (SI)

Nel 1960, la XI Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure introdusse il Sistema Internazionale delle Unità di Misura. Oggi è costituito da 7 unità fondamentali, da unità derivate e supplementari.

Le unità di misura, anche se spesso hanno tratto il nome da scienziati del passato, devono essere scritte con iniziale minuscola e senza accenti: newton, volt, ampere, hertz, joule, …..
I simboli corrispondenti, invece, hanno iniziale maiuscola: N, V, A, Hz, J, … e vanno sempre posposti al valore: 10 V, 5 A, 240 Hz, …..

Le altre unità, come metro, kilogrammo, secondo, …, hanno simboli costituiti da lettere minuscole (e senza punto finale): m , kg, s , …..

Unica eccezione è il litro il cui simbolo può essere sia l sia L .

SISTEMA SI - UNITA’ DI MISURA FONDAMENTALI

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza fisica	Nome dell'unità SI	Simbolo dell'unità SI
Intensità di corrente elettrica	I, i	ampere	A
Intensità luminosa	I_v	candela	cd
Lunghezza	l	metro	m
Massa	m	chilogrammo	kg
Quantità di sostanza	n	mole	mol
Temperatura termodinamica	T	kelvin	K
Intervallo di tempo	t	secondo	s

Errori comuni:

~~10 sec.~~ ⇒ 10 s   ~~10 °K~~ ⇒ 10 K   ~~20 C~~ ⇒ 20 °C   ~~5 gr.~~ ⇒ 5 g

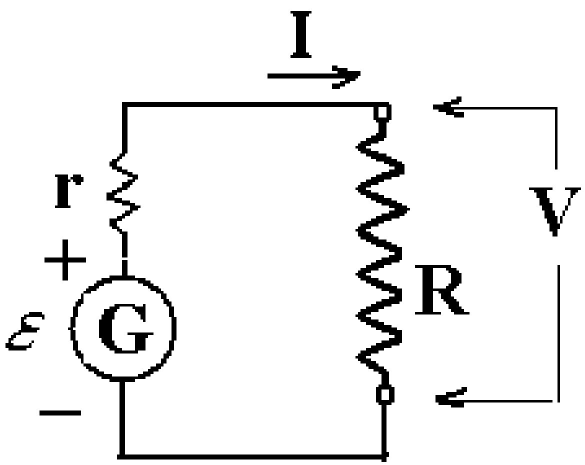
Esempi di grandezze

esprimibili con numeri reali	esprimibili con numeri complessi
Potenza	
Potenziale elettrico	
Resistenza	
Reattanza	Impedenza
Coefficiente di riflessione $\lvert\rho\rvert^2$	Coefficiente di riflessione ρ
Return Loss	
SWR	

MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI DELLE UNITA' SI

Fattore	Prefisso	Simbolo	Nome	Origine
10^{24}	yotta	Y	Quadrilione	οκτο , Greco ' otto' (ottava potenza di mille)
10^{21}	zetta	Z	Triliardo	sept , Francese 'sette' (settima potenza di mille)
10^{18}	exa	E	Trilione	εξ , Greco 'sei' (sesta potenza di mille)
10^{15}	peta	P	Biliardo	πεντε , Greco ' cinque' (quinta potenza di mille)
10^{12}	tera	T	Bilione	τερασ, Greco ' mostruoso'
10^{9}	giga	G	Miliardo	γιγασ, Greco ' gigante'
10^{6}	mega	M	Milione	μεγασ, Greco '
10^{3}	kilo	k	Mille	χιλιοι, Greco
10^{2}	etto	h	Cento	εκατον, Greco
10^{1}	deca	da	Dieci	δεκα, Greco
10^{-1}	deci	d	Decimo	decima pars, Latino
10^{-2}	centi	c	Centesimo	pars centesima, Latino
10^{-3}	milli	m	Millesimo	pars millesima, Latino
10^{-6}	micro	μ	Milionesimo	μικροσ, Greco 'poco'
10^{-9}	nano	n	Miliardesimo	nanus , Latino 'nano'
10^{-12}	pico	p	Bilionesimo	pica , Latino 'punta'
10^{-15}	femto	f	Biliardesimo	femten, Danese 'quindici'
10^{-18}	atto	a	Trilionesimo	atten, Danese 'diciotto'
10^{-21}	zepto	z	Triliardesimo	sept . Francese 'sette' (settima potenza di 1/1000)
10^{-24}	yocto	y	Quadrilionesimo	οκτο , Greco ' otto' (ottava potenza di 1/1000)

RESISTENZE E CONDUTTANZA



$$\boxed{V = R\,I}$$

V = differenza di potenziale [V] (volt)

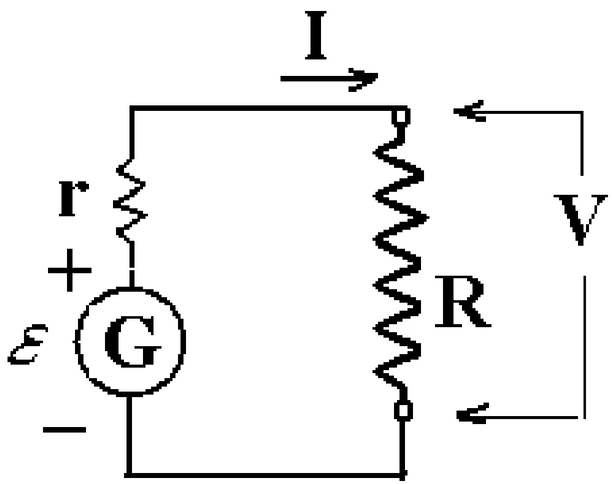
R = resistenza [Ω] (ohm)

I = intensità di corrente [A] (ampere)

$\mathcal{E}$ = forza elettro motrice [V]

r = resistenza interna del generatore [Ω]

RESISTENZE E CONDUTTANZA



$$\boxed{I = \frac{1}{R} V}$$

$$\boxed{I = G\,V}$$

$$\boxed{G = \frac{1}{R}}$$

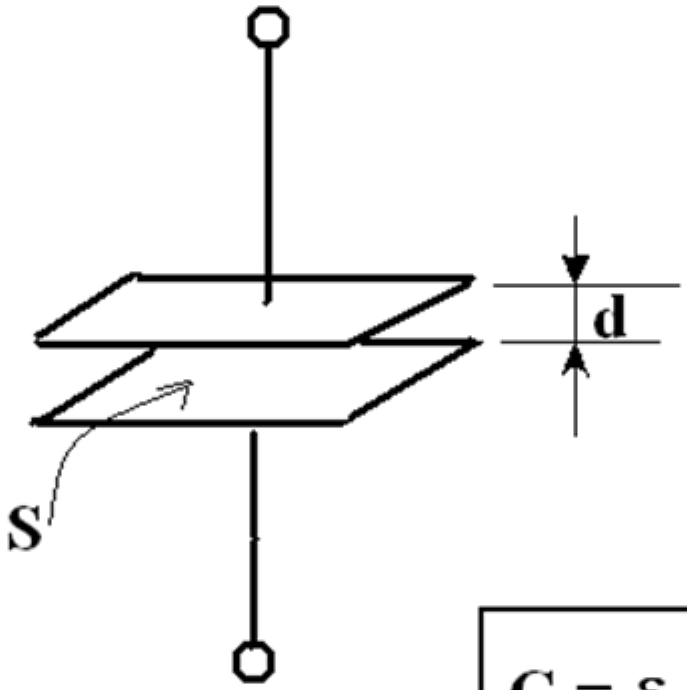
V = differenza di potenziale [V] (volt)

G = conduttanza [S] (siemens)

R = resistenza [Ω] (ohm)

I = intensità di corrente [A] (ampere)

CONDENSATORE



C = capacità [F]

ε_o = costante dielettrica vuoto
= $8.82\ 10^{-12}$ F-m

ε_r = costante dielettrica relativa
(aria = 1)

$$C = \varepsilon_o\, \varepsilon_r\, \frac{S}{d}$$

S = superficie armature [m^2]

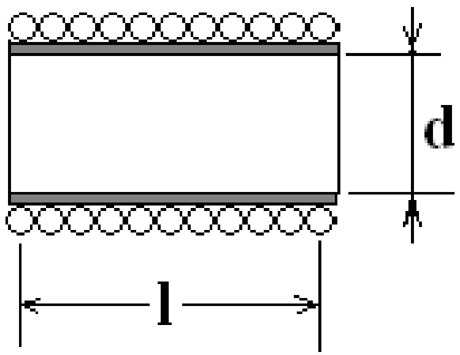
d = distanza armature [m]

Esempio: $d = 0.1$ mm, $\varepsilon_r = 4$, $S = 100\ cm^2$

$$C = 8.82\ 10^{-12} \cdot 4 \cdot \frac{100\ 10^{-4}}{0.1\ 10^{-3}} = 3.53\ 10^{-9}\ F = 3.53\ nF$$

INDUTTANZA

molte formule, a seconda del tipo di avvolgimento ....



Bobina in aria, singolo strato :

$$L = 0{,}987\ 10^{-2}\ N^2\ \frac{d}{l}$$

L = induttanza [μH]

N = numero spire

d = diametro [cm]

l = lunghezza [cm]

Esempio:

N = 10, d = 1 cm , l=2 cm :

$$L = 0.987\ 10^{-2}\ 10^2\ \frac{1}{2} \cong 0.5\ \mu H$$

Esempi:

-La resistenza equivalente Req di due resistenze R1 e R2 poste in serie è data dalla somma dei valori delle due resistenze.

Sia: R1 = 1.2 MΩ ed R2 = 550 kΩ . Calcolare Req.

-La capacità equivalente Ceq di due condensatori C1 e C2 posti in parallelo è data dalla somma dei rispettivi valori.

Sia : C1 = 150 pF e C2 = 1 nF . Calcolare Ceq.

- L'induttanza equivalente Leq di due induttanze L1 e L2 poste in serie è data dalla somma dei rispettivi valori.

Sia : L1 = 1.5 mH e L2 = 300 μH. Calcolare Leq.

Occorre, in tutti i casi, ridurre le varie grandezze ad una stessa unità di misura.

- $R1 = 1.2\ M\Omega$ $R2 = 550\ k\Omega \rightarrow 0.55\ M\Omega$

$Req = 1.2 + 0.55 = 1.75\ M\Omega$

oppure:

$R1 = 1.2\ M\Omega \rightarrow 1200\ k\Omega$ $R2 = 550\ k\Omega$

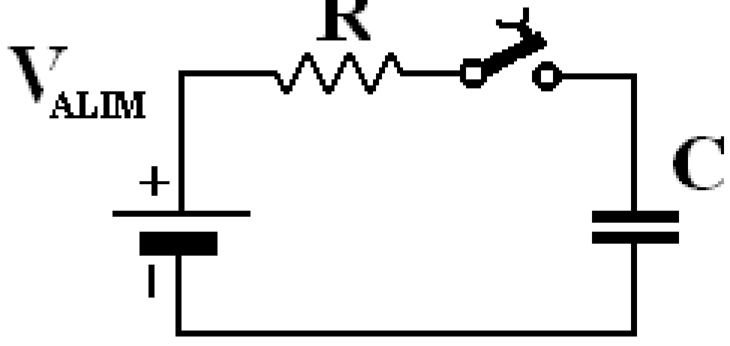
$Req. = 1200 + 550 = 1750\ k\Omega$

- $C1 = 150\ pF$ $C2 = 1\ nF \rightarrow 1000\ pF$

$Ceq. = 150 + 1000 = 1150\ pF$

-$L1 = 1.5\ mH$ $L2 = 300\ \mu H \rightarrow 0.3\ mH$

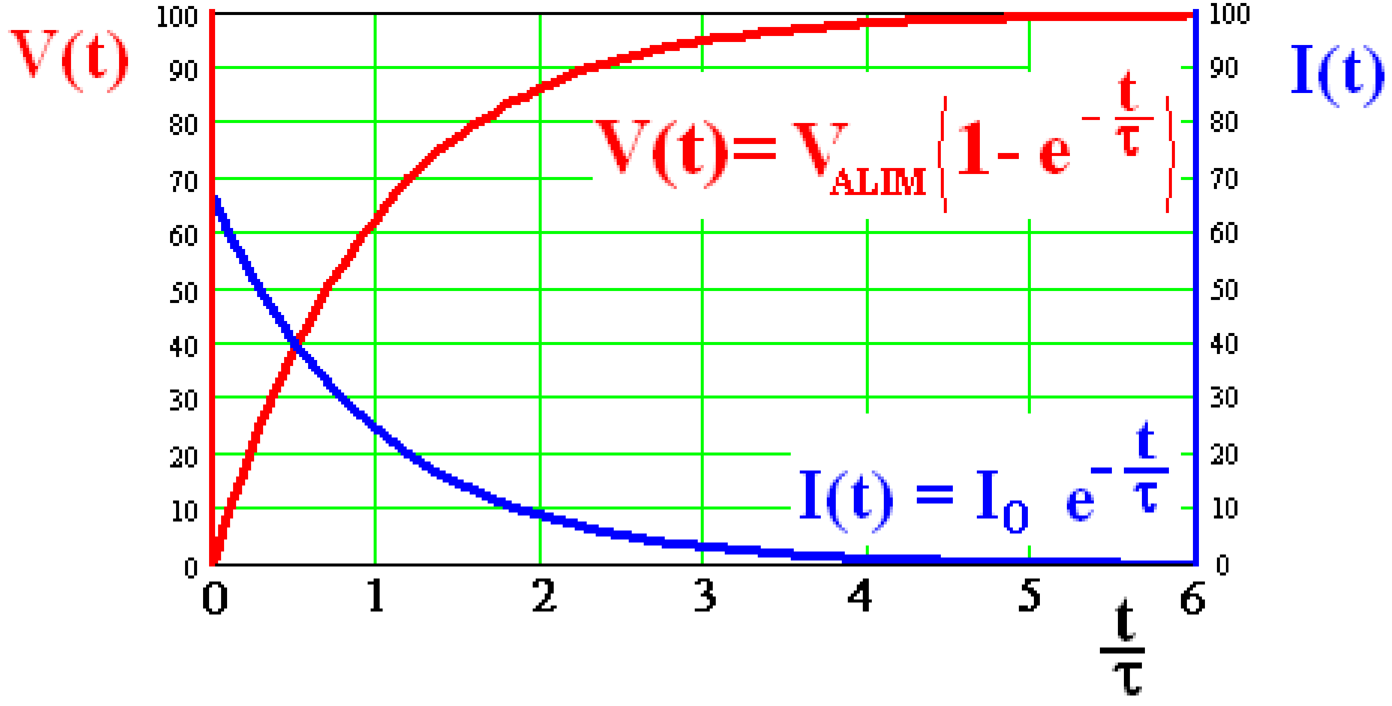
$Leq. = 1.5 + 0.3 = 1.8\ mH$

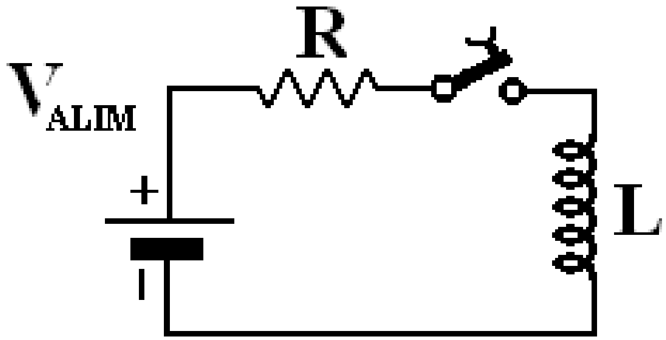


CIRCUITO RC
costante di tempo

$$\tau = R\,C$$

$$I_0 = \frac{V_{ALIM}}{R}$$

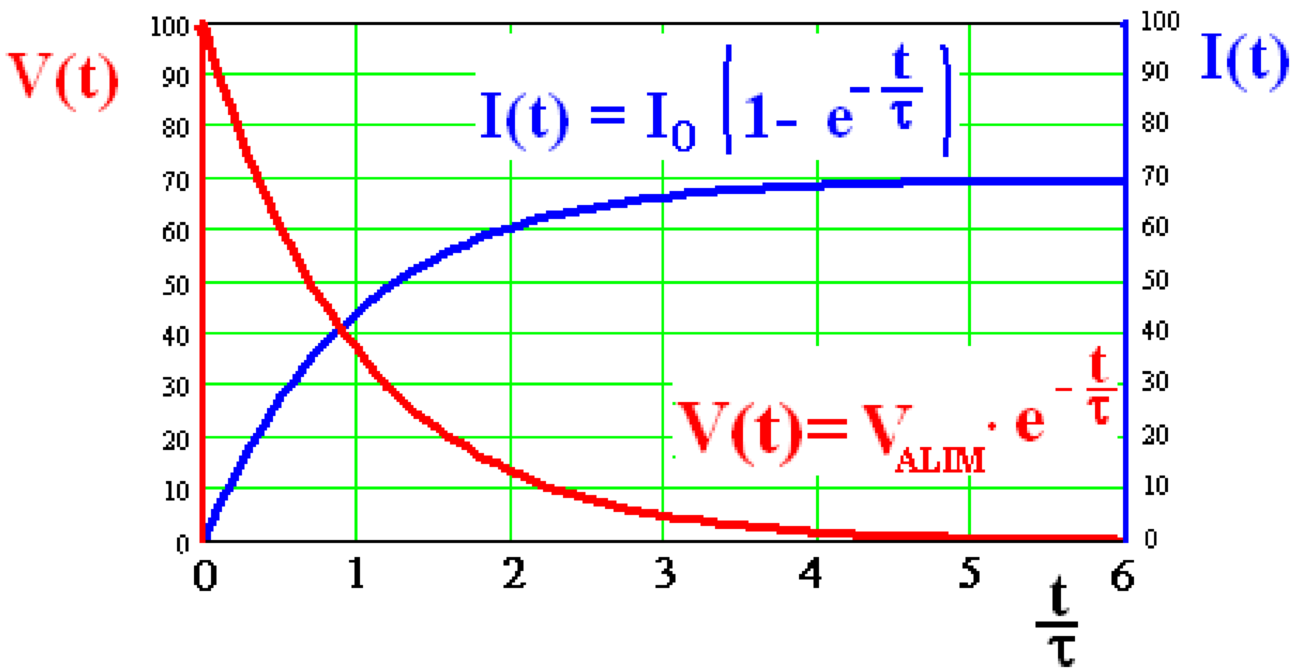




CIRCUITO RL
costante di tempo

$$\tau = \frac{R}{L}$$

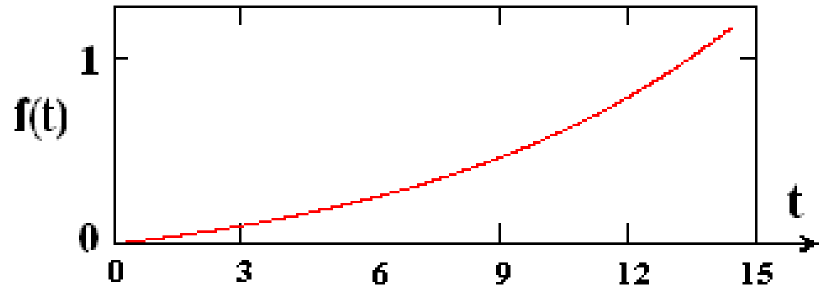
$$I_0 = \frac{V_{ALIM}}{R}$$



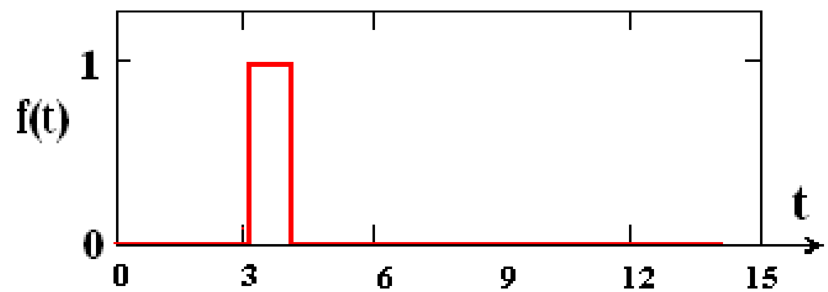
SEGNALI APERIODICI

Esempi:

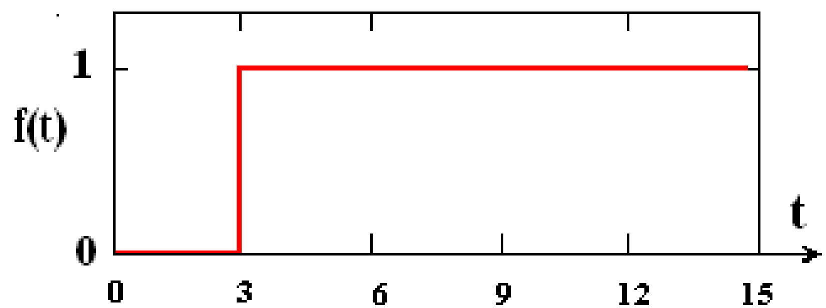
funzione esponenziale



funzione impulso



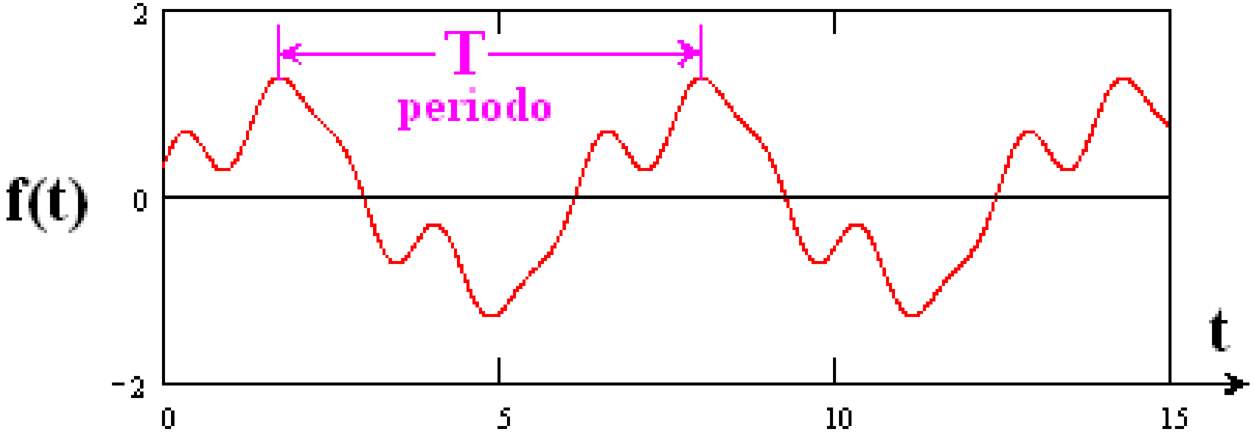
funzione gradino



Con la Trasformata di Fourier si possono ottenere gli spettri di frequenze.

SEGNALI PERIODICI

Il segnale si ripete nel tempo con periodo T.



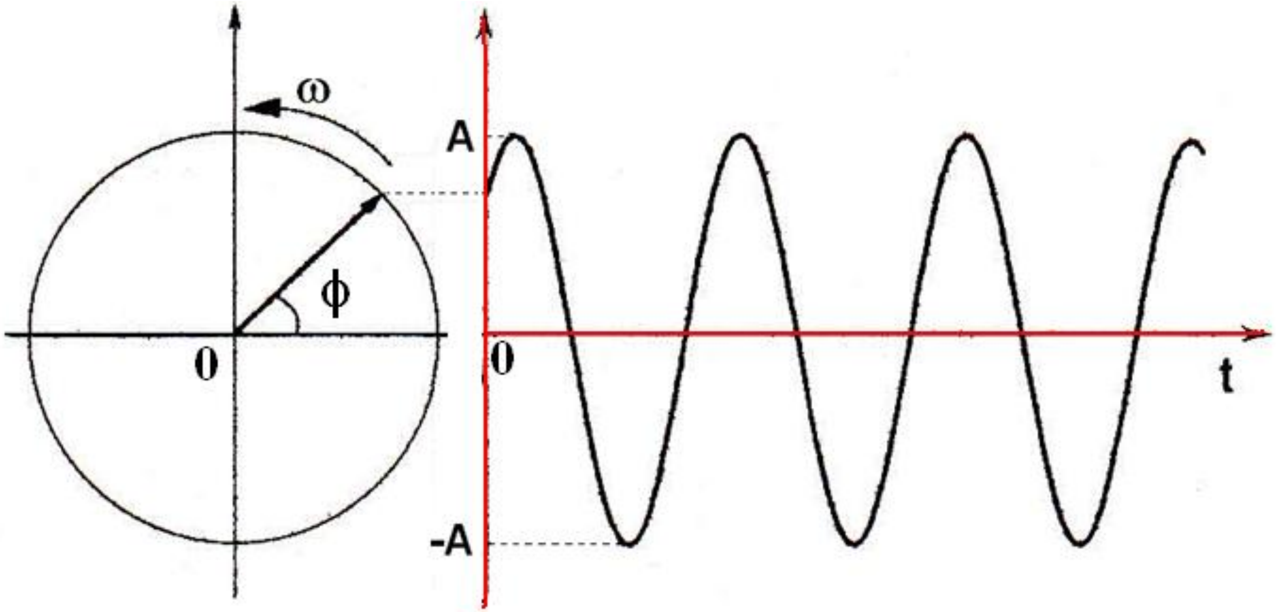
I segnali periodici possono essere descritti con Serie di Fourier.
Gli spettri di frequenza contengono componenti a frequenze multiple di una frequenza fondamentale (inverso del periodo).

SEGNALE SINUSOIDALE

E’ descritto da:

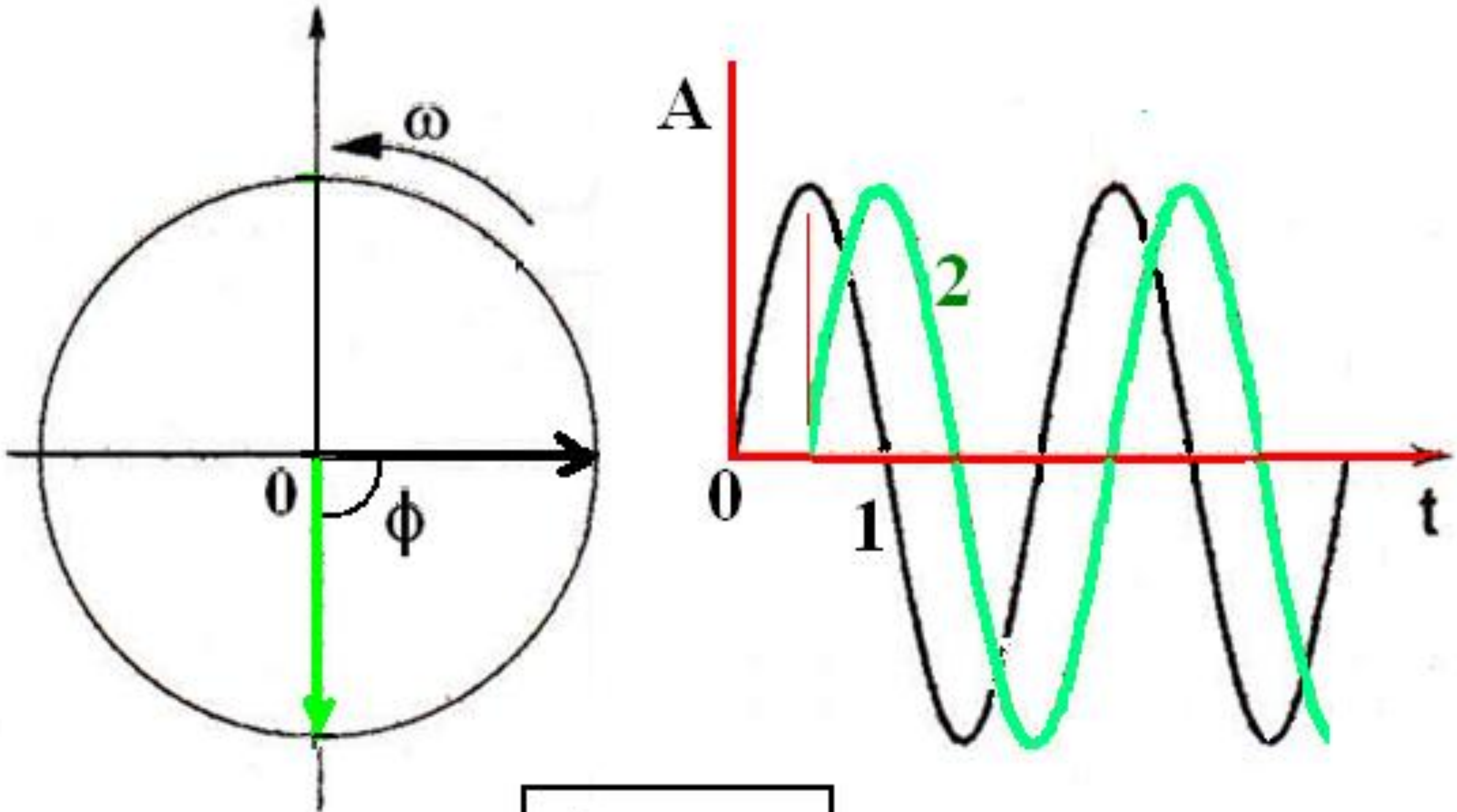
$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

dove: A = ampiezza del segnale
ω = velocità angolare ($\omega = 2 \pi f$)
ϕ = fase iniziale (fase al tempo t = 0)



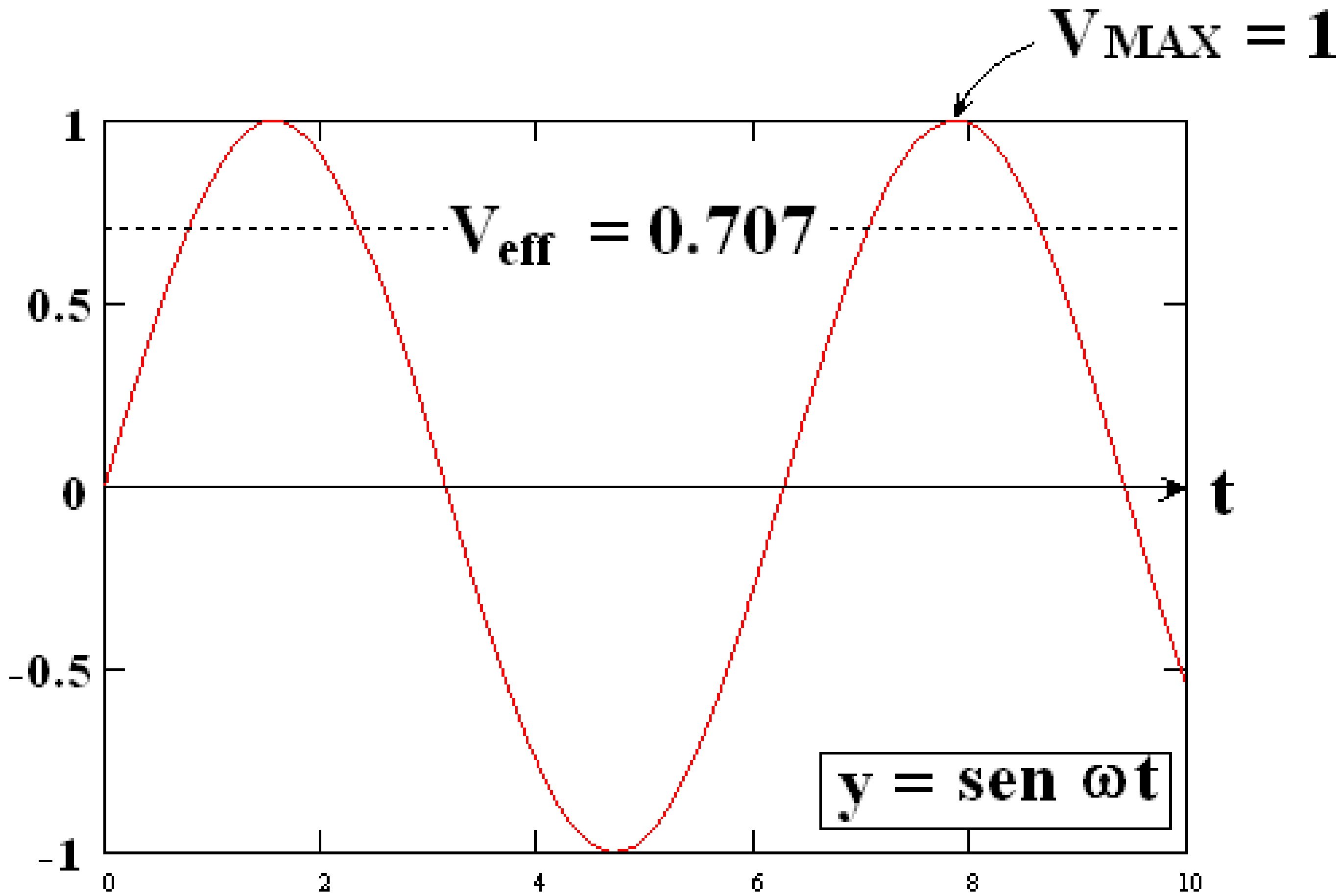
Il segnale sinusoidale è ottenuto dalla proiezione sull’asse verticale del vettore di modulo A, con origine nel centro degli assi che ruota in senso antiorario ad una velocità angolare ω e con fase iniziale ϕ.

DIFFERENZA DI FASE



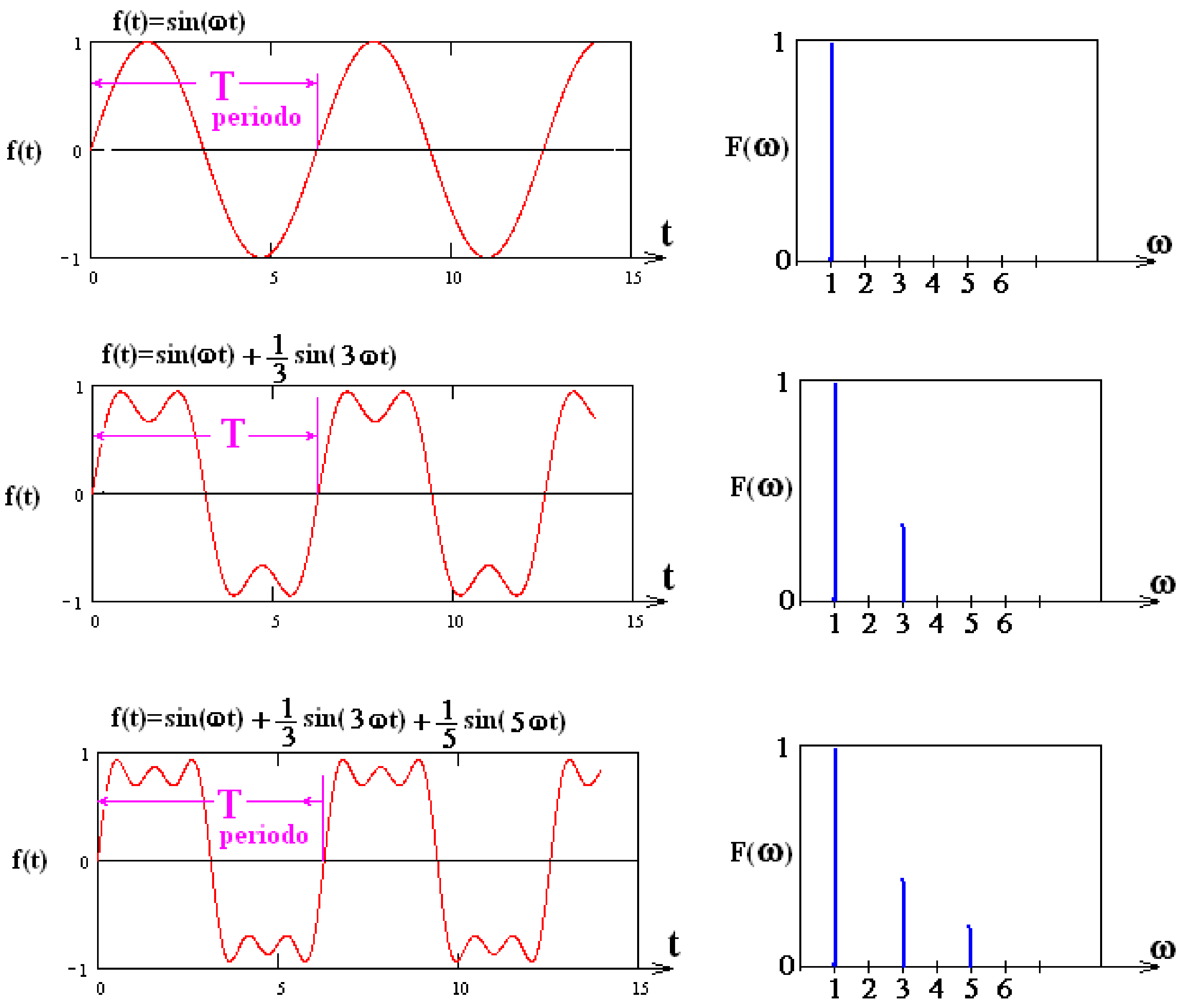
$$\boxed{\phi = \omega\, t}$$

VALORE EFFICACE



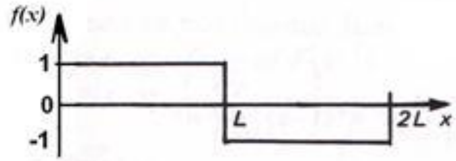
$$\frac{V_{eff}}{V_{MAX}} = 0.707 \qquad \frac{V_{MAX}}{V_{eff}} = 1.41$$

Formazione di onda periodica (quadra) come somma di onde sinusoidali

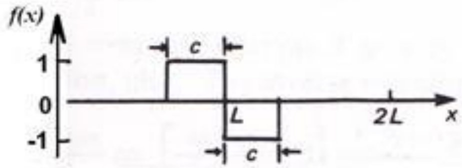


Alcuni esempi di segnali periodici e loro sviluppo in Serie di Fourier

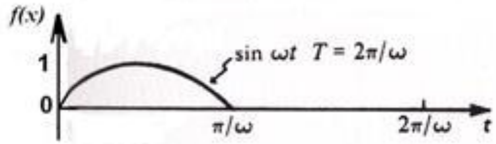
2L = T



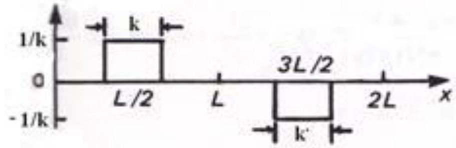
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



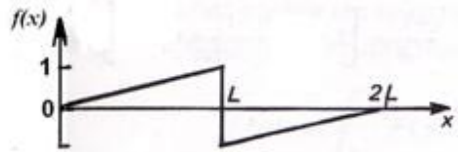
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\cos\frac{n\pi c}{L}-1\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$



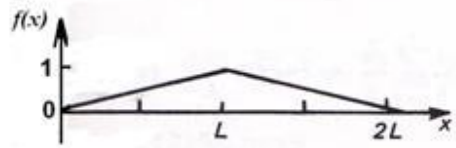
$$f(x) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\omega t-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2,4,6\ldots}\frac{1}{n^2-1}\cos n\omega t$$



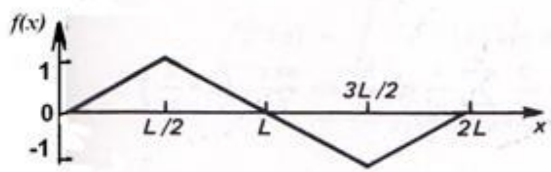
$$f(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\pi k/L\right)}{\frac{1}{2}n\pi k/L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



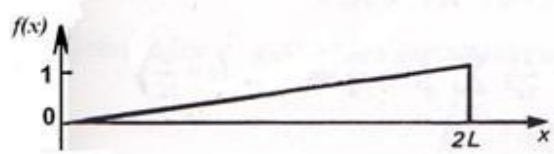
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$



$$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

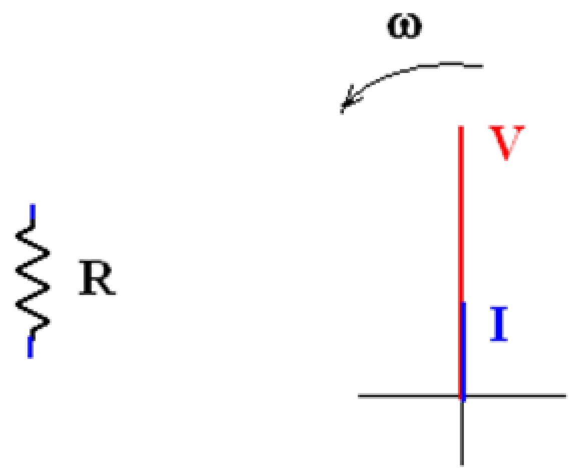


$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

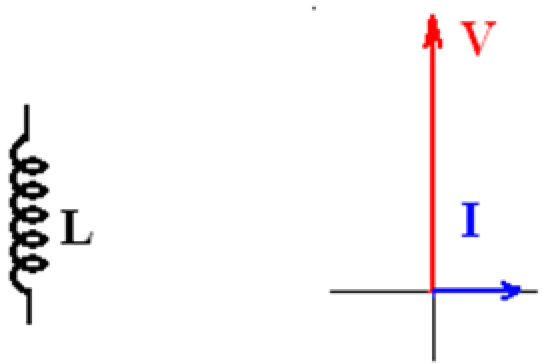


$$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

COMPONENTI IN CORRENTE ALTERNATA

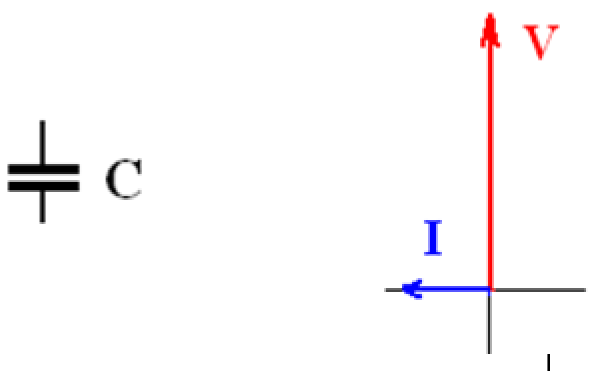


$$I = \frac{V}{R}$$



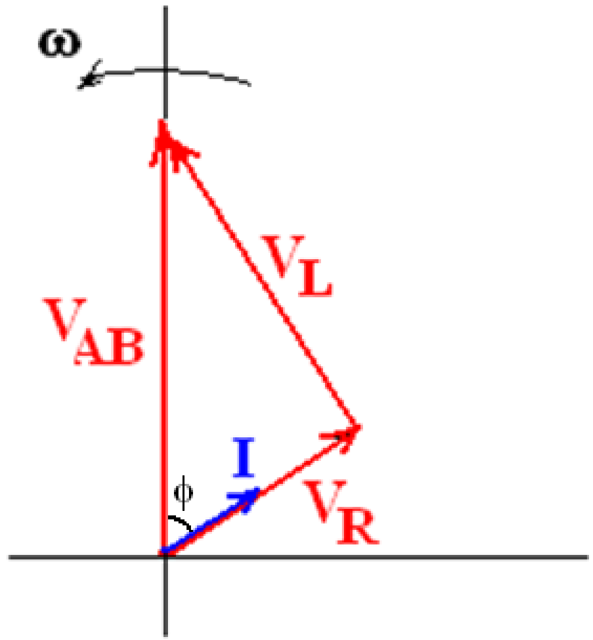
$$I = \frac{V}{X_L}$$

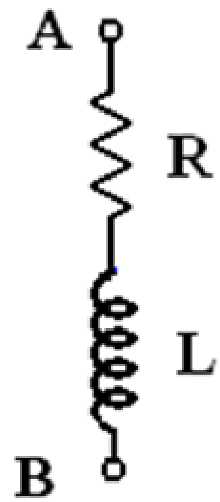
$$X_L = 2\,\pi\, f\, L$$



$$X_C = \frac{1}{2\,\pi\, f\, C}$$

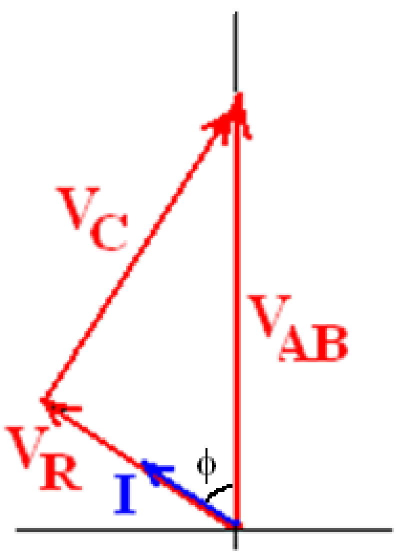
$$I = \frac{V}{X_C}$$

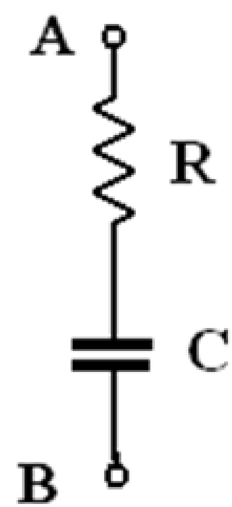




$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

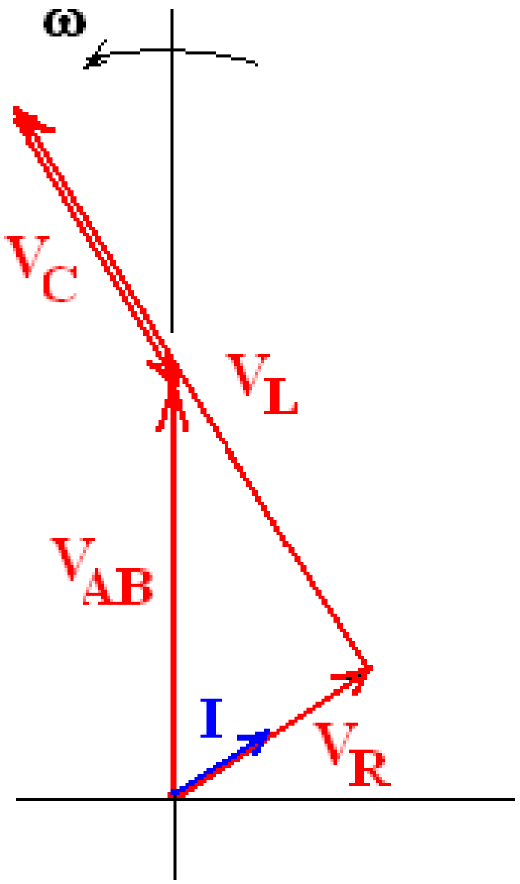
$$X_L = 2\pi f L$$

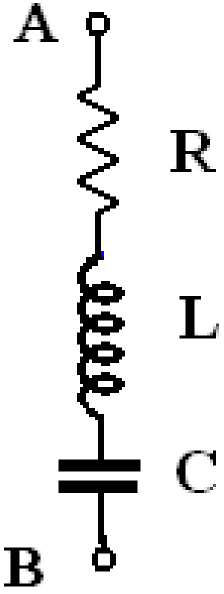




$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$





$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

prodotto di binomi

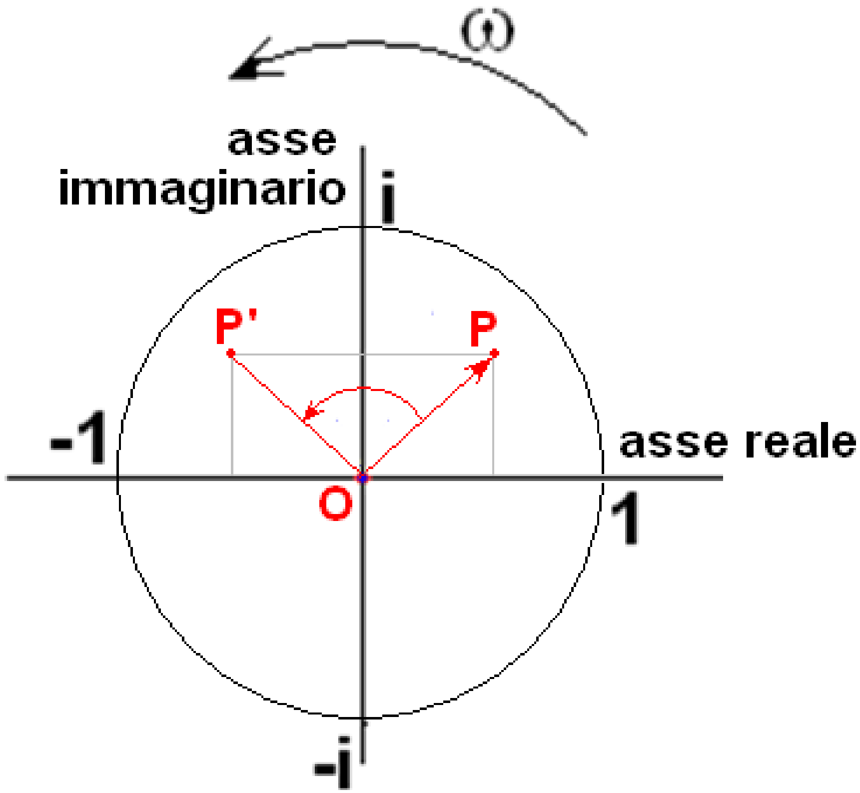
$$(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(2+3)\,(4+1) = 2\cdot 4 + 2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 3\cdot 1 = 25$$

$$(a+ib)\,(c+id) = ac + iad + ibc - bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

divisione di binomi

$$\frac{3+i4}{2+i} = \frac{3+i4}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{6-i3+i8+4}{2\cdot 2+1} = \frac{10+i5}{5} = 2+i$$



Dato un punto P di coordinate 0.5+i 0.5 ovvero un vettore OP (nel primo quadrante), moltiplicare le coordinate per i , vuol dire ruotare il vettore di 90° secondo ω e portarlo in P'.

Un numero reale (sull'asse reale) quando viene moltiplicato per i , si ritrova sull'asse immaginario.
Un numero immaginario se viene moltiplicato per i , diviene un numero reale .

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

z	modulo $\lvert z \rvert$	modulo quadro $(\lvert z \rvert)^2 = z \cdot z^*$	z quadrato $z \cdot z$
$a + i \cdot b$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$(a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 + b^2$	$(a + i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2 \cdot a \cdot b$
$a + i \cdot a$	$\sqrt{2} \cdot a$	$2 \cdot a^2$	$i \cdot 2 \cdot a^2$
$a - i \cdot b$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$(a - i \cdot b) \cdot (a + i \cdot b) = a^2 + b^2$	$(a - i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 - i \cdot 2 \cdot a \cdot b$
$a - i \cdot a$	$\sqrt{2} \cdot a$	$2 \cdot a^2$	$-i \cdot 2 \cdot a^2$

z		modulo $\lvert z \rvert$	modulo quadro $(\lvert z \rvert)^2 = z \cdot z^*$
$\frac{a+i\cdot b}{c+i\cdot d}$	$\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$	$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$
$\frac{a+i\cdot b}{c-i\cdot d}$	$\frac{a\cdot c-b\cdot d}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{b\cdot c+a\cdot d}{c^2+d^2}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$	$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$
$\frac{a+i\cdot b}{a-i\cdot b}$	$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\cdot\frac{2\cdot a\cdot b}{a^2+b^2}$	1	1
$\frac{a-i\cdot b}{c+i\cdot d}$	$\frac{a\cdot c-b\cdot d}{c^2+d^2}-i\cdot\frac{b\cdot c+a\cdot d}{c^2+d^2}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$	$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$
$\frac{a-i\cdot b}{a+i\cdot b}$	$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-i\cdot\frac{2\cdot a\cdot b}{a^2+b^2}$	1	1
$\frac{a-i\cdot a}{a+i\cdot a}$	$-i\cdot 1$	1	1
$\frac{a-i\cdot b}{c-i\cdot d}$	$\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}-i\cdot\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$	$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI
operazioni notevoli

$A = a + i\,b$ $\quad$ $A^* = a - i\,b$ $\quad$ Complesso coniugato

$A \cdot A^* = |A|^2 \quad = a^2 + b^2$

$A - A^* = \; 2 \cdot \mathrm{Im}(A) \quad = i2\,b$

$A + A^* = \; 2 \cdot \mathrm{Re}(A) \quad = 2\,a$

$e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$

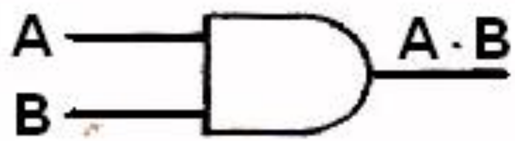
$e^{i\beta} = \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta$

$e^0 = 1$

ALGEBRA DI BOOLE

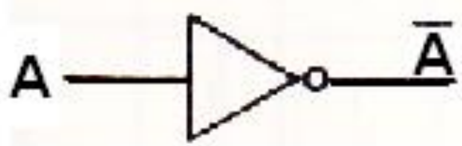
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR



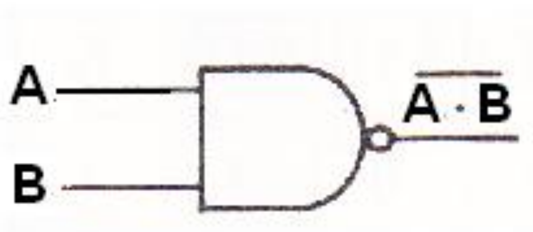
A	B	A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND



A	$\overline{A}$
0	1
1	0

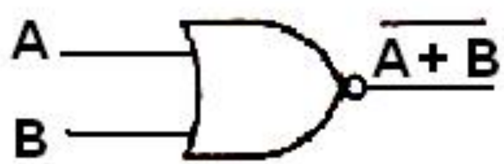
NOT



A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

(AND + NOT)



A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

(OR + NOT)

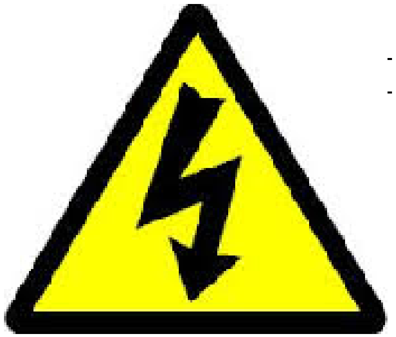
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

EX-OR

0

A	B	$\overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EX-NOR

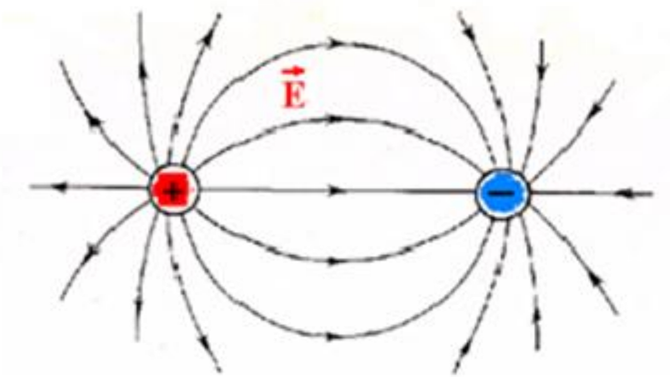


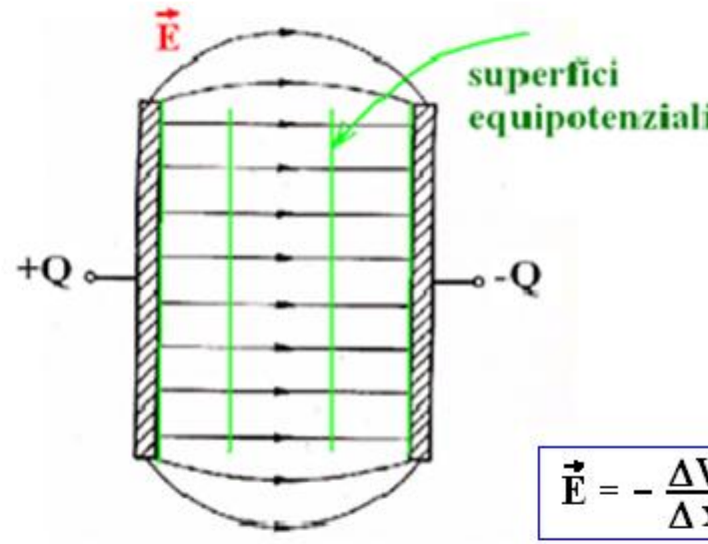
PERICOLO ELETTRICO

L'alta tensione è pericolosa perchè la corrente che circola nel corpo umano crea danni importanti e può essere mortale.
Una corrente di soli 1 mA è percepita come fastidiosa, ma i muscoli possono controllare i movimenti ed è facile allontanarsi.
Con correnti di 100 mA (o anche meno se in AC) il dolore è intenso, si fatica a respirare ed è difficile allontarsi da soli.
Con oltre 100 mA può essere mortale
La tensione inferiore a 30 V può considerarsi non pericolosa, ma la reazione del corpo umano è molto "individuale" e dipende molto dalle condizioni fisiche della persona.

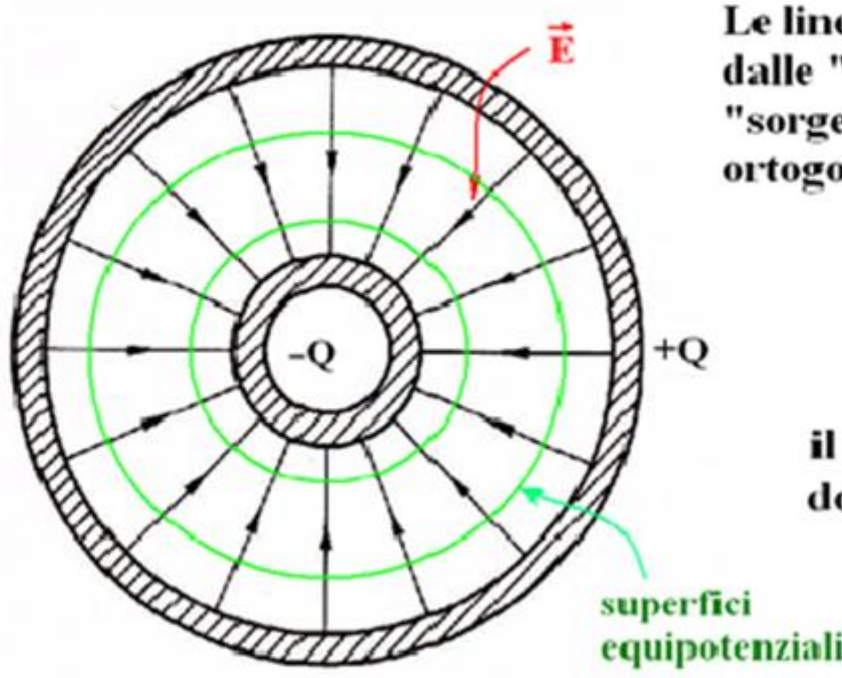
Resistenza tipica offerta dal corpo umano (valori indicativi)
filo sfiorato da un dito: $50\,k\Omega \div 1\,M\Omega$ (secco), $5\,k\Omega \div 15\,k\Omega$ (bagnato)
tubo afferrato da una mano: $3k\Omega \div 10k\Omega$ (secco), $1k\Omega \div 3\,k\Omega$ (bagnato)
mano o piede immerso in liquido conduttore: $100 \div 500\ \Omega$

CAMPO ELETTRICO





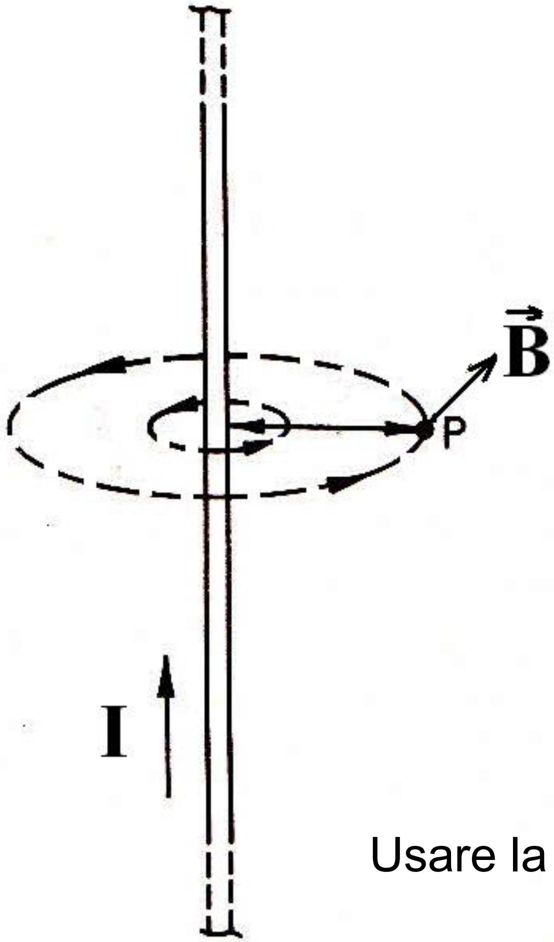
$$\vec{E} = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

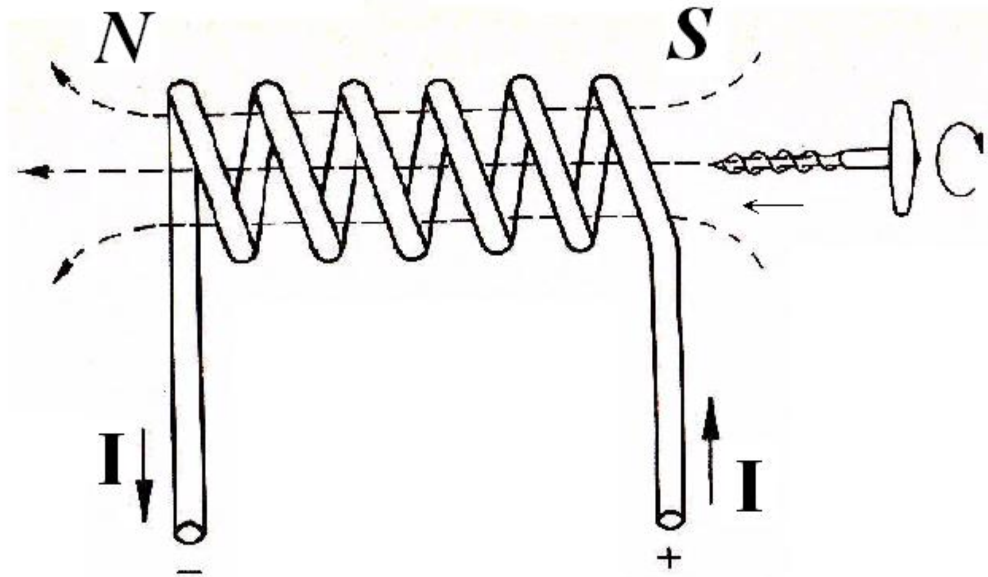


Le linee di forza del campo elettrico vanno dalle "sorgenti" di carica positiva alle "sorgenti" di carica negativa, sempre ortogonali alle superfici equipotenziali

il campo elettrico E è più intenso dove si addensano le linee di forza

CAMPO MAGNETICO

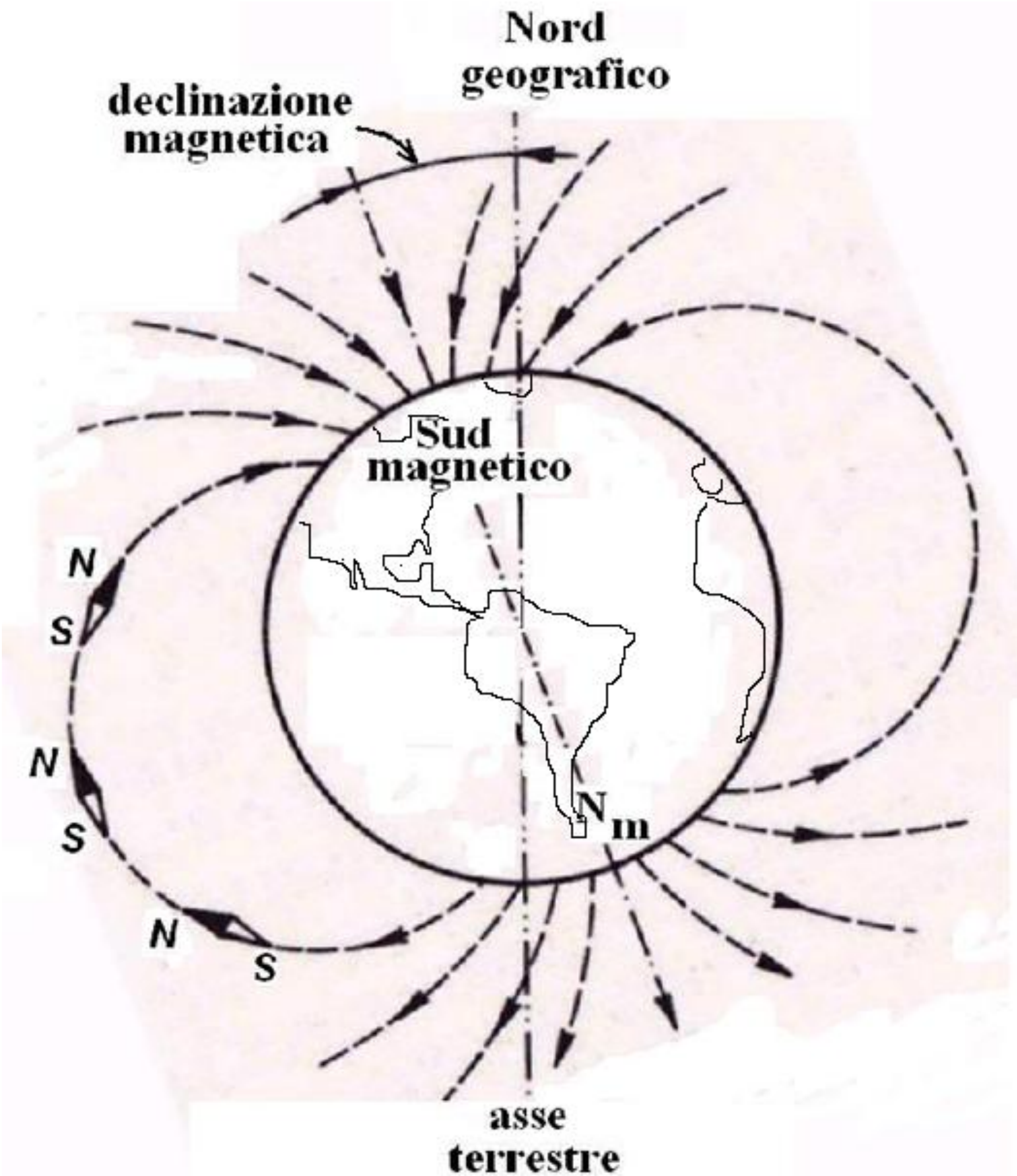




Usare la “regola della mano destra” e la “regola del cavatappi”

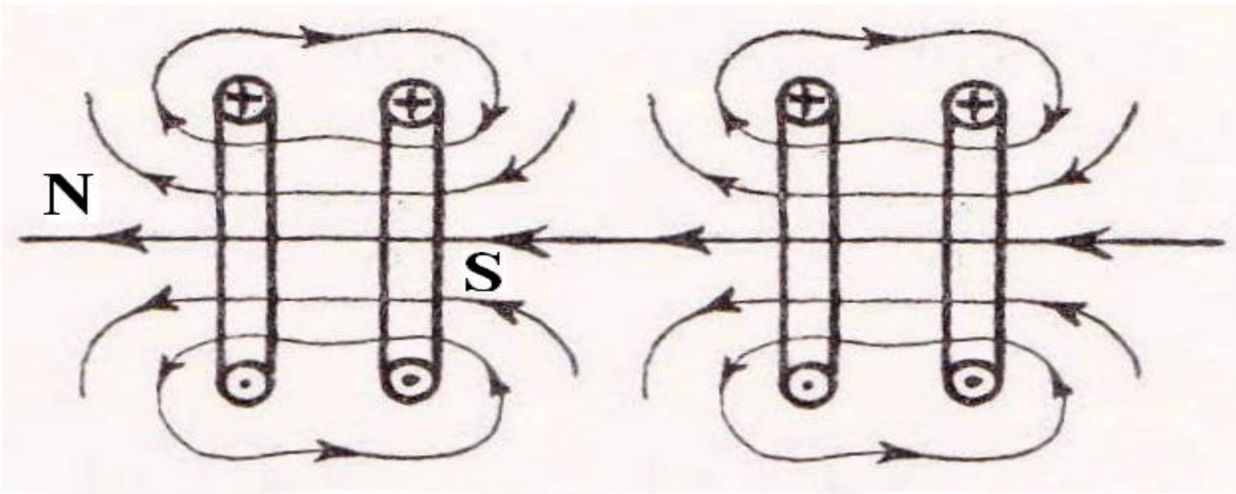
Le linee di forza del campo magnetico sono sempre linee chiuse, senza “sorgenti”.
L’orientamento, all’esterno, è dal Nord al Sud

CAMPO MAGNETICO

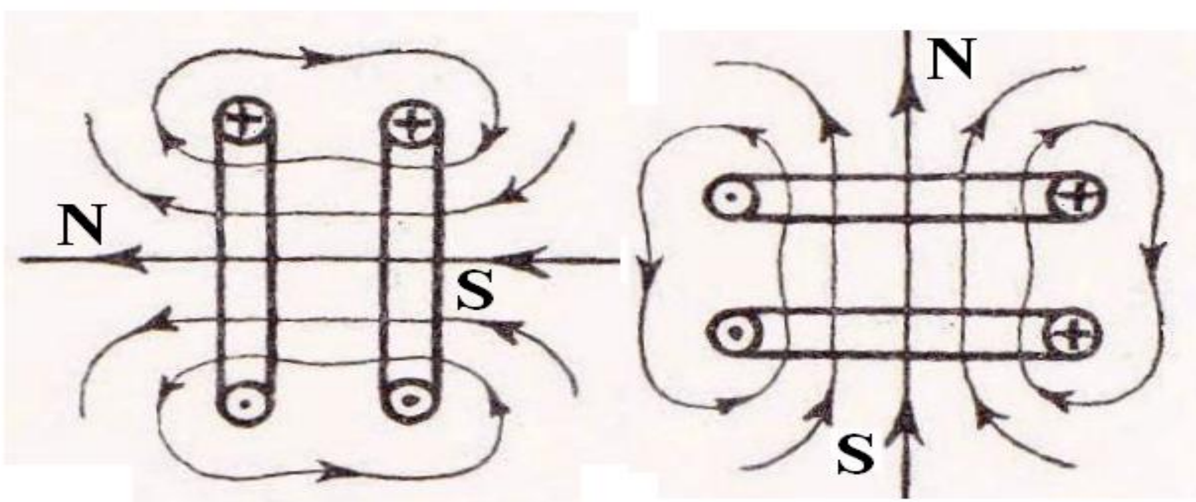


Il polo nord dell’ago calamitato della bussola si dirige lungo le linee di forza del campo magnetico terrestre verso il polo sud magnetico

ACCOPPIAMENTO



massimo

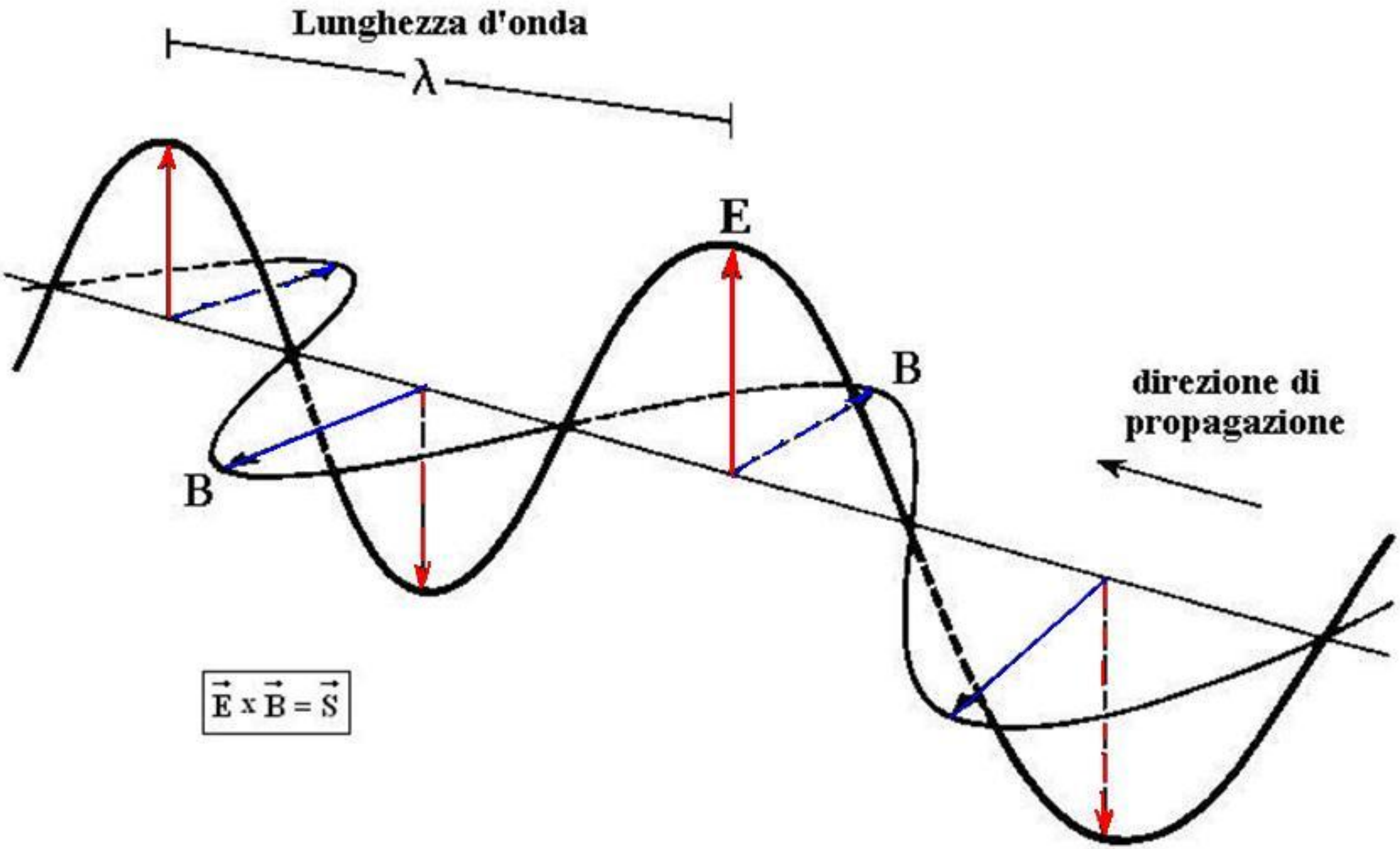


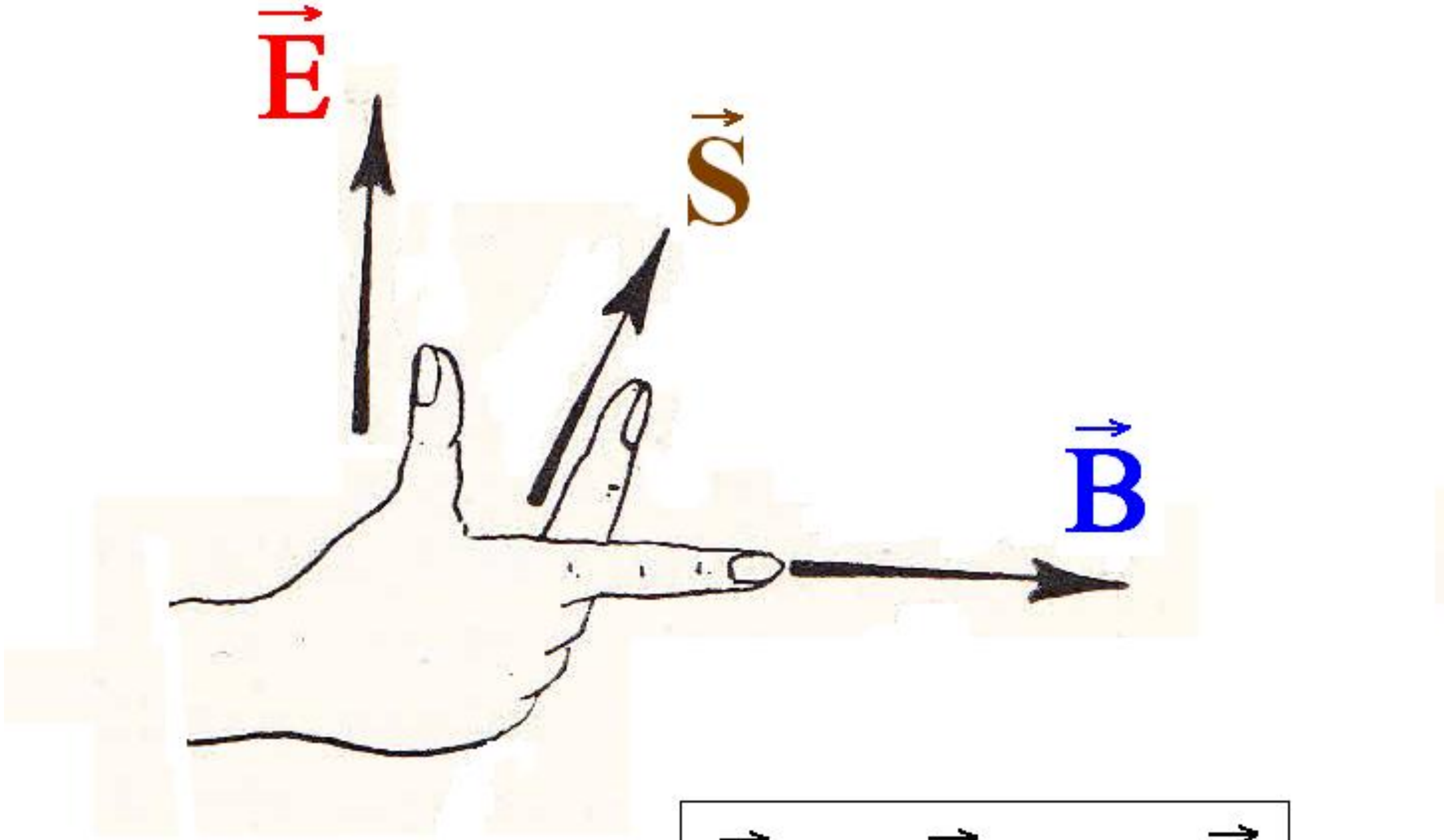
minimo

COSTANTI FISICHE e FATTORI di CONVERSIONE

costante	simbolo	valore	unità di misura
velocità della luce nel vuoto	c	299792458	$m\ s^{-1}$
Impedenza caratteristica del vuoto	Zo	376.730313461…	Ω
permettività del vuoto	ε_o	$8.854187817\ 10^{-12}$	$F\ m^{-1}$
Permeabilità del vuoto	μ_o	$4\ \pi\ 10^{-7}$ (esatto)	$H\ m^{-1}$
Costante di Boltzmann	k	$1.3806488\ 10^{-23} \pm 1.3\ 10^{-29}$	$J\ K^{-1}$
Costante di Planck	h	$6.62606957\ 10^{-34} \pm 2.9\ 10^{-41}$	$J\ s$
Costante di Avogadro	N	$6.02214129\ 10^{23} \pm 2.7\ 10^{16}$	mol^{-1}
Costante di gravitazione	G	$6.67259\ 10^{-11} \pm 8.5\ 10^{15}$	$m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5.670373\ 10^{-8} \pm 2.1\ 10^{-13}$	$W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Costante di struttura fine	α	$1 / 137.0359991 \pm 2.4\ 10^{-12}$	-
Numero di Avogadro	N_A	$6.02214129\ 10^{23} \pm 2.7\ 10^{-30}$	mol^{-1}
carica dell'elettrone	e	$1.60217733\ 10^{-19} \pm 4.9\ 10^{-26}$	C
massa dell'elettrone	m_e	$9.1093829\ 10^{-31} \pm 4\ 10^{-38}$	kg
"	m_e	$0.510998928 \pm 1.1\ 10^{-8}$	MeV
momento magnetico dell'elettrone	μ_e	$-928.476430\ 10^{-26} \pm 2.1\ 10^{-31}$	$J\ T^{-1}$
massa del protone	m_p	$1.672621777\ 10^{-27} \pm 7.4\ 10^{-35}$	kg
momento magnetico del protone	μ_p	$1.410606743\ 10^{-26} \pm 3.3\ 10^{-34}$	$J\ T^{-1}$
massa del neutrone	m_n	$1.674927351\ 10^{-27} \pm 7.4\ 10^{-35}$	kg
momento magnetico del neutrone	μ_n	$-0.96623647\ 10^{-26} \pm 2.3\ 10^{-33}$	$J\ T^{-1}$

ONDA ELETTROMAGNETICA





$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{S}}}$$